

1 Laskuharjoitus

1.1 Kertausta

$$\mathbf{e}'_i = R_\chi^\dagger R_\theta^\dagger R_\phi^\dagger \mathbf{e}_i R_\phi R_\theta R_\chi$$

missä ”tikari” tarkoittaa reversiota, ja spinorit ovat

$$\begin{aligned} R_\phi &= e^{e_{123}\phi\mathbf{e}_3/2} \\ R_\theta &= e^{e_{123}\theta\mathbf{n}/2} \\ R_\chi &= e^{e_{123}\chi\mathbf{e}'_3/2} \end{aligned}$$

ja solmuviiva (line of nodes) on

$$\mathbf{n} = R_\phi^\dagger \mathbf{e}_1 R_\phi = \mathbf{e}_1 e^{e_{123}\phi\mathbf{e}_3} = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_3}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_3|}$$

Sama kierroilla avaruuteen kiinnitettyjen akseleiden \mathbf{e}_3 ja \mathbf{e}_1 suhteen

$$\mathbf{e}'_i = R_\phi^\dagger Q_\theta^\dagger Q_\chi^\dagger \mathbf{e}_i Q_\chi Q_\theta R_\phi$$

missä

$$\begin{aligned} Q_\chi &= e^{e_{123}\chi\mathbf{e}_3/2} \\ Q_\theta &= e^{e_{123}\theta\mathbf{e}_1/2} \end{aligned}$$

tai akseleiden \mathbf{e}'_3 ja \mathbf{e}'_1 suhteen kiertämällä

$$\mathbf{e}'_i = R'_\phi^\dagger Q'_\theta^\dagger R'_\chi^\dagger \mathbf{e}_i R_\chi Q'_\theta R'_\phi$$

missä spinorit R'_ϕ ja Q'_θ määritelty

$$\begin{aligned} R'_\phi &= e^{e_{123}\phi\mathbf{e}'_3/2} \\ Q'_\theta &= e^{e_{123}\theta\mathbf{e}'_1/2} \end{aligned}$$

R voidaan esittää muodossa

$$R = \alpha + e_{123}\beta$$

missä α skalaari, ja β vektori.

1.2 Tehtävät

1. Johda

$$R^\dagger \mathbf{c} R = (\alpha - e_{123}\beta) \mathbf{c} (\alpha + e_{123}\beta) = (2\alpha^2 - 1) \mathbf{c} + 2\alpha\beta \times \mathbf{c} + 2\mathbf{c} \cdot \beta\beta$$

missä \mathbf{c} on jokin vektori.

2. Esitä \mathbf{e}'_1 avaruuteen kiinnitettyjen vektoreiden \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , ja \mathbf{e}_3 avulla.

3. Esitä \mathbf{e}_1 vektoreiden \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , ja \mathbf{e}'_3 avulla.

4. Olkoon

$$R(\mathbf{B}) = e^{\mathbf{B}/2}$$

missä \mathbf{B} on bivektori. Todista:

$$R^\dagger(\mathbf{B}) \mathbf{B} R(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$$

5. Olkoon

$$R = R_1(t) R_2(t) R_3(t)$$

missä

$$\dot{R}_i = \frac{dR_i}{dt}$$

(t on jokin skalaariparametri) ja

$$\omega_i = 2e_{123} \dot{R}_i^\dagger R_i = -2e_{123} R_i^\dagger \dot{R}_i$$

Todista:

$$\omega = 2e_{123} \dot{R}^\dagger R = R_3^\dagger (R_2^\dagger \omega_1 R_2 + \omega_2) R_3 + \omega_3$$