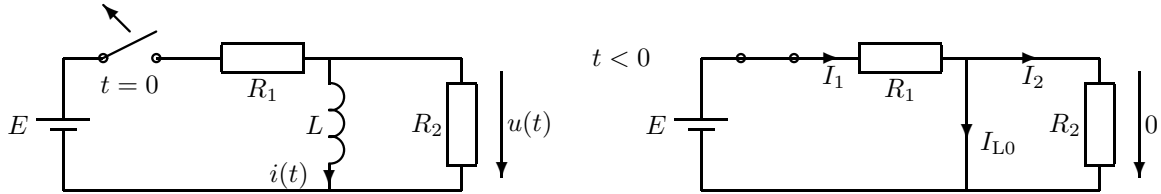


Kirjasta poistettua materiaalia. Versio 29.9.2003.

## Laplace-muunnostehtäviä

### 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöt

**Esim. 1.** Laske jännite  $u(t)$ , kun kytkin avataan hetkellä  $t = 0$  (kuva 1).

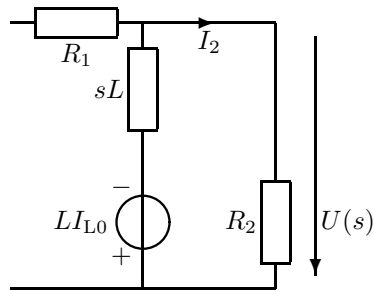


**Kuva 1.** Kelan käsittely Laplace-muunnoksen avulla.

Lasketaan oikealla olevasta yksinkertaistetusta piiristä ensin kelan alkuvirta. Kelaa ei ole piirretty kuvaan, koska alkutilanteen vakio tasavirta menee esteettömästi sen läpi.

$$-E + R_1 I_1 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{L0} = I_1 - I_2 = \frac{E - 0}{R_1} - \frac{0}{R_2} = \frac{E}{R_1} \quad (1)$$

Tarkastellaan piiriä kytkimen avaamisen jälkeen. Laplace-muunnetaan jokainen komponentti erikseen (kuva 2):



**Kuva 2.** Piiri alkuarvoineen Laplace-muunnettuna.

$$L I_{L0} + s L I_2 + R_2 I_2 = 0 \quad (2)$$

$$I_2 = \frac{-L I_{L0}}{s L + R_2} = \frac{-I_{L0}}{s + \frac{R_2}{L}} \quad (3)$$

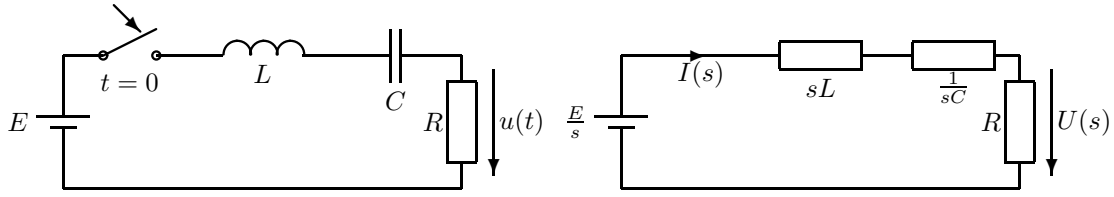
$$U = R_2 I_2 = \frac{-\frac{R_2}{R_1} E}{s + \frac{R_2}{L}} \quad (4)$$

$$u(t) = -E \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{t}{L/R_2}} \quad (5)$$

Näin yksinkertaisissa piireissä Laplace-muunnoksen etu ei vielä kunnolla tule esiin, mutta yritäpä laskea seuraava esimerkki diffisyhtälöillä. No, voihan olla, että osaisitkin.

## 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöt

**Esim. 2.** Laske jännite  $u(t)$  kolmella eri vastusarvolla ( $R = 5 \Omega$ ,  $4 \Omega$  ja  $2 \Omega$ ), kun kytkin suljetaan hetkellä  $t = 0$  (kuva 3).  $E = 3 \text{ V}$ ,  $L = 3 \text{ H}$ ,  $C = 0,75 \text{ F}$ . Samaa piiriä on käsitelty myös kirjan luvussa 'RLC-piirin muutosilmiöt'.



**Kuva 3.** RLC-piirin Laplace-muuntaminen. Piirin käsittely ilman Laplace-muunnosta vaatisi toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

Piirissä ei kulje virtaa, kun kytkin on auki, joten alkuvirta  $I_{L0} = 0$ . Kondensaattorissa voisi olla alkujännite, mutta oletetaan sekin tässä nollassi. Kuvassa 3 oikealla piiri on Laplace-muunnettuna.

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{E}{L}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \quad (6)$$

$$U(s) = RI(s) = \frac{\frac{R}{L} E}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \quad (7)$$

Jotta sopiva muunnoskaava voidaan valita, lasketaan **nimittäjäpolynomin nollakohdat**:

$$s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8)$$

Olkoon  $R = 5 \Omega > 2\sqrt{L/C}$  (ylikriittinen vaimennus).

$$s = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{4}{9}} = -\frac{5}{6} \pm \frac{3}{6} \quad (9)$$

$$s = -\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad s = -\frac{4}{3} \quad (10)$$

Laplace-käänteismuunnos voidaan etsiä kaavalla (12):

$$U(s) = \frac{5}{\left(s + \frac{1}{3}\right)\left(s + \frac{4}{3}\right)} \quad (11)$$

$$u(t) = \frac{5}{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} \left( e^{-\frac{4}{3}t} - e^{-\frac{1}{3}t} \right) = 5 \left( e^{-\frac{4}{3}t} - e^{-\frac{1}{3}t} \right) \quad (12)$$

Samaan tulokseen olisi tultu myös osamurtokehitelmällä:

$$U(s) = \frac{5}{\left(s + \frac{1}{3}\right)\left(s + \frac{4}{3}\right)} = \frac{A}{s + \frac{1}{3}} + \frac{B}{s + \frac{4}{3}} = \frac{As + Bs + \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}B}{\left(s + \frac{1}{3}\right)\left(s + \frac{4}{3}\right)} \quad (13)$$

$$\underbrace{As + Bs}_{0 \cdot s} + \underbrace{\frac{4}{3}A + \frac{1}{3}B}_5 = 5 \quad (14)$$

$$\underbrace{As + Bs = 0}_{B=-A} \Rightarrow \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) A = 5 \Rightarrow A = 5 \quad (15)$$

Tämän ja kahden muun kohdan ratkaisu on esitetty kuvassa 4.

Jos vastus olisi ollut  $R = 4 \Omega = 2\sqrt{L/C}$  (kriittinen vaimennus), olisi päädytty kaavaan 15 ( $n = 1$ ):

$$s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow s = -\frac{2}{3} \quad (16)$$

$$U(s) = \frac{4}{\left(s + \frac{2}{3}\right)^2} \quad (17)$$

$$u(t) = 4te^{-\frac{2}{3}t} \quad (18)$$

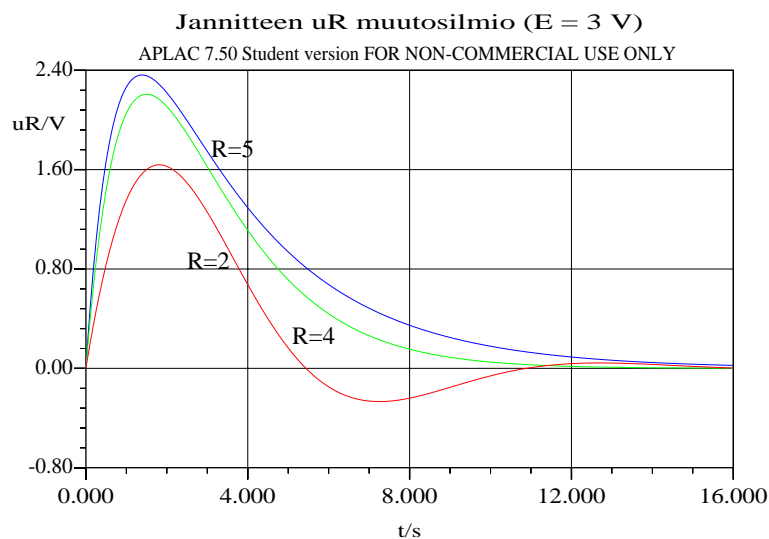
Pienellä vastusarvolla nimittäjäpolynomien juuret ovat kompleksiset, mikä johtaa kaavojen 13 ja 14 käyttöön. Olkoon nyt  $R = 2 \Omega < 2\sqrt{L/C}$  (alikirittinen vaimennus). Kehitetään nimittäjä "neliöimällä": lisätään nimittäjään  $s$ :n kertoimen puolikkaan neliö ja vähennetään se heti pois.

$$s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = \quad (19)$$

$$s^2 + s\frac{R}{L} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} = \left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} \quad (20)$$

$$U(s) = \frac{2}{s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (21)$$

$$u(t) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{3}t} \sin \frac{1}{\sqrt{3}}t \quad (22)$$



**Kuva 4.** Kuvan 3 piirin vaste kolmella eri vastusarvolla. Huomaa, kuinka keskimäinen käyrä on juuri menemäisillään vaaka-akselin alapuolelle, ja vastusta pienentämällä menisikin sinne.

APLAC:

```
Volt E 1 0 tran=3*(t>0)
Res R 1 2 5
Short S1 2 3 i=iC
Cap C 3 4 0.75
Ind L 4 0 3
```

```
Res R2 1 12 4
Short S2 12 13 i=i2
Cap C2 13 14 0.75
Ind L2 14 0 3
```

```
Res R3 1 22 2
Short S3 22 23 i=i3
Cap C3 23 24 0.75
Ind L3 24 0 3
```

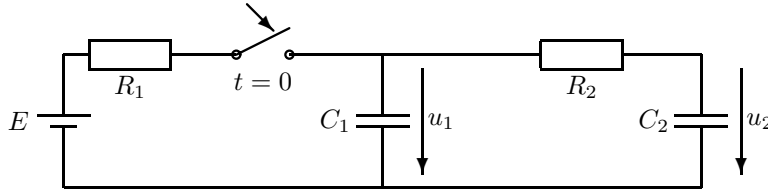
```
Sweep "Jannitteen uR muutosilmio (E = 3 V)"
+ Loop 2001 Time Lin 0 16
+ Y "uR" "V" -0.8 2.4
+ Grid
+ Big_Screen
*+ EPS=muut8.eps
```

```
Show Y Vtran(1)-Vtran(2)
Show Y Vtran(1)-Vtran(12)
Show Y Vtran(1)-Vtran(22)
```

```
Print Window 0 X 3.1 Y 1.7 s "R=5"
Print Window 0 X 5.1 Y 0.2 s "R=4"
Print Window 0 X 2.5 Y 0.8 s "R=2"
EndSweep
```

**Esim. 3.** Kytin suljetaan hetkellä  $t = 0$  (kuva 5).  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 25 \Omega$ ,  $C_1 = 0,4 \text{ F}$ ,  $C_2 = \frac{1}{60} \text{ F}$ ,  $E = 10 \text{ V}$ ,  $u_1(0) = u_2(0) = 0$ . Osoita Laplace-muunnoksen avulla, että piiri toteuttaa differentiaaliyhtälön:

$$E = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \frac{du_2}{dt} + u_2 \quad (23)$$



**Kuva 5.** Jos piirissä on kaksi kondensaattoria tai kaksi kela, syntyy toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö.

Muunnetaan differentiaaliyhtälö Laplace-muunnettuun muotoon käyttämällä derivaatan Laplace-muunnoksen kaavaa.

$$\frac{E}{s} = R_1 R_2 C_1 C_2 (s^2 U_2) + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) (s U_2) + U_2 \quad (24)$$

$$U_2 = \frac{E/s}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) + 1} \quad (25)$$

Johdetaan sama lauseke Laplace-muunnetun piirin perusteella. Jännitteenjakaja:

$$U_2 = \frac{\frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \cdot U_1 \quad U_1 = \frac{Z}{R_1 + Z} \cdot \frac{E}{s} \quad (26)$$

$$Z = \frac{(R_2 + \frac{1}{sC_2}) \cdot \frac{1}{sC_1}}{(R_2 + \frac{1}{sC_2}) + \frac{1}{sC_1}} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{sC_1 R_2 + \frac{C_1}{C_2} + 1} = \frac{sC_2 R_2 + 1}{s^2 C_1 C_2 R_2 + s(C_1 + C_2)}$$

$$U_2 = \frac{\frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{\frac{sC_2 R_2 + 1}{s^2 C_1 C_2 R_2 + sC_1 + sC_2}}{R_1 + \frac{sC_2 R_2 + 1}{s^2 C_1 C_2 R_2 + sC_1 + sC_2}} \cdot \frac{E}{s} \quad (28)$$

$$U_2 = \frac{1}{sC_2 R_2 + 1} \cdot \frac{sC_2 R_2 + 1}{(s^2 C_1 C_2 R_2 + sC_1 + sC_2) R_1 + sC_2 R_2 + 1} \cdot \frac{E}{s} \quad (29)$$

$$= \frac{E/s}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2) + 1} = \frac{60}{s(s^2 + s5 + 6)} \quad (30)$$

Etsitään lopuksi käännteismuunnos  $u_2(t)$  osamurtokehitemän avulla. Osamurtokehitemässä osoittajan asteluku on yleensä yhtä alempi kuin nimittäjän; siksi vakion  $D$  lisäksi osoittajaan tulee vielä termi  $Bs$  (kirjain  $C$  oli varattu kondensaattorille).

$$U_2 = \frac{A}{s} + \frac{Bs + D}{s^2 + s5 + 6} = \frac{As^2 + 5As + 6A + Bs^2 + Ds}{s(s^2 + s5 + 6)} \quad (31)$$

$$\underbrace{(A+B)}_0 s^2 + \underbrace{(5A+D)}_0 s + \underbrace{6A}_{60} = 60 \Rightarrow A = 10 \quad B = -A \quad D = -5A$$

$$U_2 = \frac{10}{s} + \frac{-10s - 50}{s^2 + s5 + 6} = \frac{10}{s} - \frac{10s + 50}{(s+2)(s+3)} \quad (33)$$

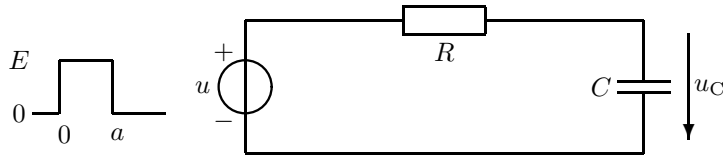
$$U_2 = \frac{10}{s} - \frac{10(s+2) + 30}{(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+3} - \frac{30}{(s+2)(s+3)} \quad (34)$$

$$u_2 = 10 - 10e^{-3t} - 30(e^{-2t} - e^{-3t}) = 10 - 30e^{-2t} + 20e^{-3t} \text{ V} \quad (35)$$

Vastaus toteuttaa alku- ja loppuehdot:  $u_2(0) = 0 \text{ V}$  ja  $u_2(\infty) = 10 \text{ V}$ .

## Pulssien ja aaltomuotojen käsittely

**Esim. 4.** Yksittäisen pulssin käsittely. Jännitelähde syöttää piiriin suorakulmaisen pulssin (kuva 6). Laske jännite  $u_C(t)$ .  $RC = 1 \text{ s}$ ,  $E = 5 \text{ V}$ ,  $a = 1 \text{ s}$ ,  $U_{C0} = 0$ .



**Kuva 6.** Laplace-muunnos sopii hyvin erilaisten pulssien ja aaltomuotojen käsittelyyn.

Muodostetaan ensin jännitelähteen lauseke kokoamalla se kahdesta askelfunktiosta. Koska toinen askel on  $a$ :n verran viivästetty, tulee Laplace-muunnokseen kerroin  $e^{-as}$  (vrt. kaava 5).

$$u(t) = E\varepsilon(t) - E\varepsilon(t-a) \quad (36)$$

$$U(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s}e^{-as} \quad (37)$$

$$U_C = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot U(s) = \frac{U(s)}{sCR + 1} = \frac{\frac{1}{RC} \cdot U(s)}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{s+1} \cdot U(s) \quad (38)$$

$$U_C = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{s} \cdot (1 - e^{-as}) \quad (39)$$

Osamurtokehitemmä:

$$\frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{A + As + Bs}{s(s+1)} \quad (40)$$

$$\underbrace{A}_5 + \underbrace{(A+B)}_0 s = 5 \Rightarrow A = 5 \Rightarrow B = -A = -5 \quad (41)$$

$$U_C = \left( \frac{5}{s} - \frac{5}{s+1} \right) \cdot (1 - e^{-as}) \quad (42)$$

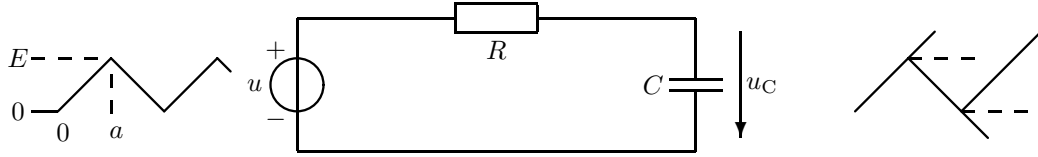
Muodostetaan lopuksi käänteismuunnos

$$u_C(t) = (5 - 5e^{-t})\varepsilon(t) - (5 - 5e^{-(t-a)})\varepsilon(t-a) \quad (43)$$

Huomaa viimeisessä välivaiheessa tehty käänteismuunnos; viivetermi otetaan huomioon myös ajan funktioissa. Ensimmäinen termi astuu voimaan heti, kun  $t \geq 0$ , mutta jälkimmäinen vasta, kun  $t \geq a$ . Ensimmäinen termi ei tietenkään sammuu tällä kohdalla eikä myöhemminkään. Jos termi halutaan sammuttaa tietyllä hetkellä, se on kumottava uudella

termillä, kuten äsken juuri tehtiin.

**Esim. 5.** Jatkuvan aaltomuodon (kuva 7) käsittely ei paljoa eroa yksittäisen pulsin käsittelystä. Nyt vain pulsseja on monta peräkkäin. Jännitelähde syöttää piiriin kolmioaallon. Laske jännite  $u_C(t)$ .  $RC = 1$  s,  $E = 5$  V,  $a = 1$  s,  $U_{C0} = 0$ .



**Kuva 7.** Kolmioaalto jännitelähteenä. Oikealla kolmioaallon koostaminen nousevista ja laskevista rampeista. Katkoviiva näyttää, kuinka nouseva ja laskeva ramppi kumoavat toisensa; joka kohdassa on kuitenkin yksi ramppi enemmän alaspäin tai ylöspäin (vrt. kerroin '2').

Jännite nousee ensin kulmakertoimella  $\frac{E}{a}$ , mutta kääntyy laskuun hetkellä  $t = a$ . Toinen termi on otettava kaksinkertaisena, jotta ensimmäisen termin vaikutus hetken  $t = a$  jälkeen voidaan kumota. Samoin kaikki seuraavat termit tulevat mukaan kaksinkertaisina. Termejä on ääretön määrä, jos aaltomuoto on jatkuva. Kolme ensimmäistä termiä riittää kuitenkin tarkasteluun hyvin, koska funktio alkaa toistaa itseään.

$$u(t) = \frac{E}{a}t\varepsilon(t) - 2\frac{E}{a}(t-a)\varepsilon(t-a) + 2\frac{E}{a}(t-2a)\varepsilon(t-2a) - \dots \quad (44)$$

$$U(s) = \frac{E}{s^2} - \frac{2E}{s^2}e^{-as} + \frac{2E}{s^2}e^{-2as} - \dots \quad (45)$$

Piirin siirtofunktio on sama kuin edellisessä esimerkissä.

$$U_C = \frac{1}{s+1} \cdot U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{s^2} (1 - 2e^{-as} + 2e^{-2as} - \dots) \quad (46)$$

Muodostetaan osamurtokehitemmä

$$\frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{s^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+D}{s^2} = \frac{As^2 + Bs^2 + Bs + Ds + D}{s^2(s+1)} \quad (47)$$

$$D + \underbrace{(B+D)}_0 s + \underbrace{(A+B)}_0 s^2 = 5 \quad (48)$$

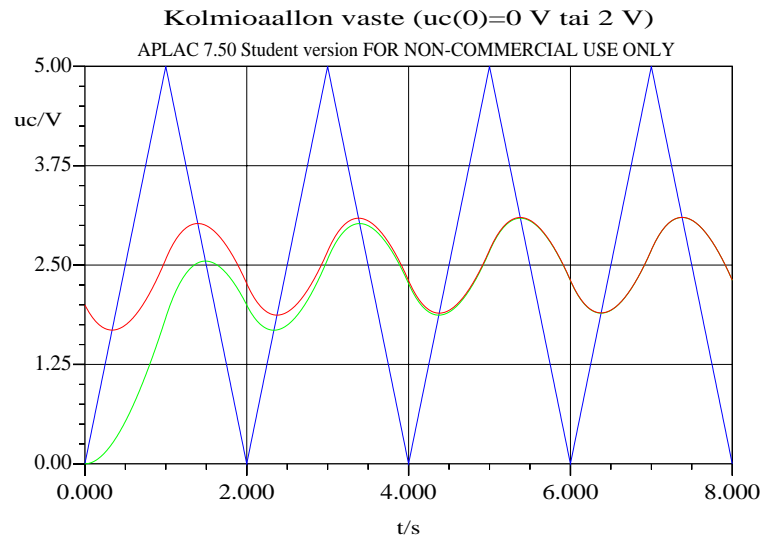
$$\Rightarrow D = 5 \quad B = -5 \quad A = 5 \quad (49)$$

$$U_C = \left( \frac{5}{s+1} + \frac{-5s+5}{s^2} \right) \cdot (1 - 2e^{-as} + 2e^{-2as} - \dots) \quad (50)$$

Muodostetaan osamurtokehitemmästä käännteismuunnos viivetermi kerrallaan

$$\begin{aligned} u_C(t) &= 5[e^{-t} + t - 1]\varepsilon(t) \\ &\quad - 10[e^{-(t-a)} + (t-a) - 1]\varepsilon(t-a) \\ &\quad + 10[e^{-(t-2a)} + (t-2a) - 1]\varepsilon(t-2a) - \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Seuraavat termit on jo helppo arvata. Mikäli jännite piirretään ajan funktiona, huomataan, että jaksollinen aaltomuoto muodostuu vasta alussa olevan muutosilmiön jälkeen. Muutosilmiötä ei tule, jos kondensaattorin alkujännite valitaan jatkuvaa tilaa vastaavaksi.



**Kuva 8.** Kuvan 7 piirin vaste, kun jännitelähde syöttää kolmioaaltoa. Kondensaattorin alkujännite määrää, miten nopeasti lopullinen aaltomuoto saavutetaan. Alipäästösuodatin muodostaa siniä muistuttavan aaltomuodon.

APLAC:

```

Volt E 1 0 tran=5*t*(t>0)-10*(t-1)*(t>1)+10*(t-2)*(t>2)
-10*(t-3)*(t>3)+10*(t-4)*(t>4)-10*(t-5)*(t>5)+10*(t-6)*(t>6)
-10*(t-7)*(t>7)+10*(t-8)*(t>8)-10*(t-9)*(t>9)+10*(t-10)*(t>10)
$ Huom. kolme edellistä riviä kuuluvat yhdelle riville!
Res R 1 2 1
Cap C 2 0 1 u0=0.0
Res R2 1 12 1
Cap C2 12 0 1 u0=2

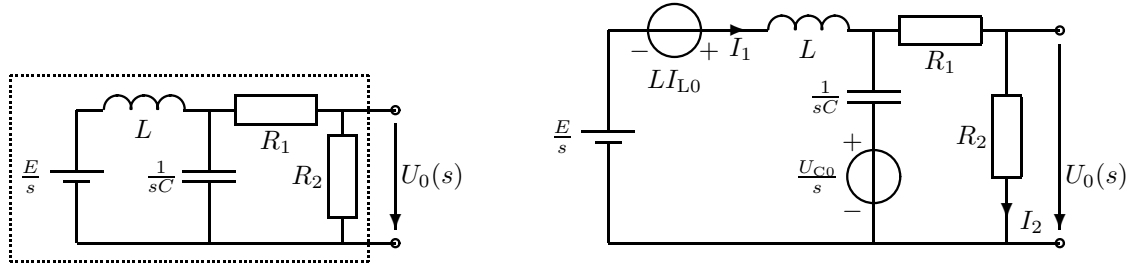
Sweep "Kolmioaallon vaste (uc(0)=0 V tai 2 V)"
+ Loop 2001 Time Lin 0 10
+ X "t" "s" 0 8
+ Y "uc" "V" 0 5
+ Grid
+ Big_Screen

Show Y vtran(1)
Show Y vtran(2)
Show Y vtran(12)
EndSweep

```

## Théveninin menetelmä ja Laplace-muunnos

**Esim. 6.** Alkuarvoja ei tarvitse laskea, jos käytetään **Théveninin menetelmää**. Lasketaan, millaista Théveninin lähdettä kuvan 9 piiri vastaa.



**Kuva 9.** Tyhjäkäyntijännitteen laskeminen. Oikealla piiri alkuarvolähteineen:  $U_{C0} = E$  ja  $I_{L0} = \frac{E}{R_1 + R_2}$ .

Vasemmalla olevasta kuvasta nähdään heti, että  $U_0(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{E}{s}$ , koska kyseessä on tasajännitelähde. Samaan tulokseen päästään, vaikka alkuarvot ja Laplace-muunnellut impedanssit otetaan huomioon, kuten seuraavassa. Merkitään  $R = R_1 + R_2$ .

$$\begin{cases} -\frac{E}{s} - LI_{L0} + sLI_1 + \frac{1}{sC}(I_1 - I_2) + \frac{U_{C0}}{s} = 0 \\ -\frac{E}{s} - LI_{L0} + sLI_1 + RI_2 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{\frac{E}{s} + LI_{L0} - RI_2}{sL} \end{cases} \quad (52)$$

$$-\frac{E}{s} - LI_{L0} + \left(sL + \frac{1}{sC}\right) \frac{\frac{E}{s} + LI_{L0} - RI_2}{sL} - \frac{1}{sC} I_2 + \frac{U_{C0}}{s} = 0 \quad (53)$$

$$I_2 = \frac{\frac{E}{s} + LI_{L0} - \left(sL + \frac{1}{sC}\right) \frac{\frac{E}{s} + LI_{L0}}{sL} - \frac{U_{C0}}{s}}{-\frac{\left(sL + \frac{1}{sC}\right)}{sL} R - \frac{1}{sC}} \quad (54)$$

Lavennetaan  $-s^3LC$ :llä lausekkeen selkeyttämiseksi:

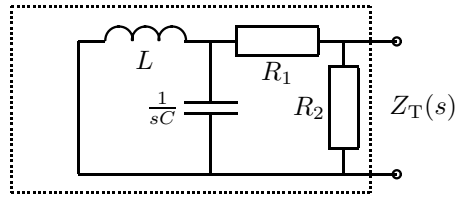
$$I_2 = \frac{-s^2LCE - s^3LCLL_{L0} + s^2C \left(sL + \frac{1}{sC}\right) \left(\frac{E}{s} + LI_{L0}\right) + s^2LCU_{C0}}{s^2C \left(sL + \frac{1}{sC}\right) R + s^2L}$$

$$I_2 = \frac{-s^2LCE - s^3LCLL_{L0} + (s^2LC + 1)E + (s^3CL + s)LI_{L0} + s^2LCU_{C0}}{(s^3CL + s)R + s^2L}$$

$$I_2 = \frac{s^2LC \overbrace{\frac{E}{s}} + sL \overbrace{\frac{E}{R}} + E}{sR(s^2LC + sL/R + 1)} = \frac{E}{sR} \quad (57)$$

$$E_T(s) = U_0(s) = R_2 I_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{E}{s} \quad (58)$$

Tyhjäkäyntijännitteen laskemiseen olisi siis riittänyt pelkkä tasavirta-analyysi. Théveninin lähteen sisäinen impedanssi on kuitenkin nyt laskettava  $s$ :n funktiona. Nollataan lähteet (kuva 10).



**Kuva 10.** Théveninin lähteen sisäisen impedanssin laskeminen.

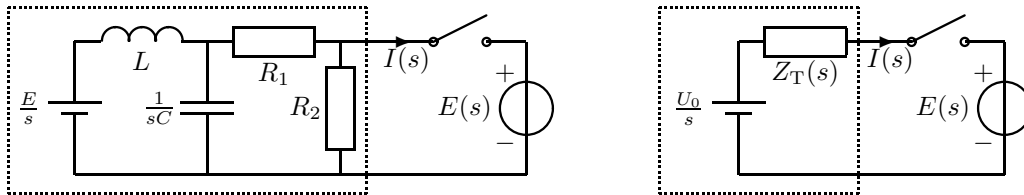
$$Z_T(s) = R_2 \parallel \left( R_1 + \frac{1}{sC} \parallel sL \right) = R_2 \parallel \left( R_1 + \frac{\frac{1}{sC} sL}{\frac{1}{sC} + sL} \right) \quad (59)$$

$$= R_2 \parallel \left( \frac{\left( \frac{1}{sC} + sL \right) R_1 + \frac{L}{C}}{\frac{1}{sC} + sL} \right) = \frac{R_2 \left( \frac{\left( \frac{1}{sC} + sL \right) R_1 + \frac{L}{C}}{\frac{1}{sC} + sL} \right)}{R_2 + \left( \frac{\left( \frac{1}{sC} + sL \right) R_1 + \frac{L}{C}}{\frac{1}{sC} + sL} \right)} \quad (60)$$

$$= \frac{R_2 \left( (1 + s^2 LC) R_1 + sL \right)}{R_2 (1 + s^2 LC) + (1 + s^2 LC) R_1 + sL} \quad (61)$$

$$= \frac{(1 + s^2 LC) R_1 + sL}{(1 + s^2 LC) (R_1 + R_2) + sL} R_2 \quad (62)$$

Alkuperäinen piiri voidaan siis korvata kuvan 11 Théveninin lähteellä. Vaikka impedanssin lauseke onkin hieman monimutkainen, säästyy aikaa, kun alkuarvoja ei tarvitse lainkaan laskea eikä ottaa mukaan analyysiin.



**Kuva 11.** Kuvan 9 piirin korvaava Théveninin lähde (oikealla). Laske tarkistuksen vuoksi molempien piirien virrat kytkimen sulkemisen jälkeen, ja totea ne samoiksi. Vasemman piirin alkuarvot ovat samat kuin edellä, mutta esim.  $I_2$ :n lauseketta ei voi käyttää, koska se laskettiin eri kytkennästä.  $E(s)$ :n tilalla voi tietysti olla mikä tahansa piiri, esimerkiksi vastus  $R_3$ .