S-55.103 SÄHKÖTEKNIIKKA

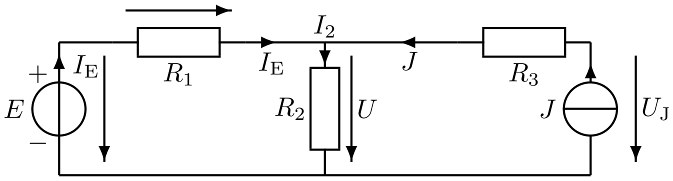
Kimmo Silvonen, versio 3.3.2005.

Laskuharjoitusten ratkaisut keväällä 2005 (yksi muutettu ja 12 uutta tehtävää). Tehtävät ilman ratkaisuja ja lisätehtävät ovat netissä omissa tiedostoissaan. Kurssin kotisivu: *http://www.ct.hut.fi/courses/bee*. Harjoitusviikkoihin liittyvät sivunumerot viittaavat kirjaan *Sähkötekniikka ja elektroniikka, Otatieto 602*. Kaikki asiat on selitetty kirjassa paljon perusteellisemmin. Nämä tehtävät kattavat kirjan aihepiireistä noin puolet. Kirjaan liittyvä oheismateriaali on saatavilla kirjan kotisivulta: *kimmos.net*. Suositus (pätee myös kokeissa): kirjoita yhtälöt ensin kirjainlausekkeina, sijoita sitten vasta lukuarvot; SI-järjestelmän yksiköt voit halutessasi jättää tällä kurssilla pois. Vastaukset annetaan mielellään desimaalilukuina esimerkiksi kolmen numeron tarkkuudella; tehtävien lukuarvot voit olettaa tarkoiksi.

Harjoitus 1, sivut 15-30, 33-37, (53-62 on hyödyllinen, samoin 499-503).

Kirchhoffin ja Ohmin lait, yhtälöiden muodostaminen, jännitteen ja virran ero, jännite- ja virtalähteen ominaisuudet, vastusten sarjaan- ja rinnankytkentä. Tärkeä harjoitus!

105. Peruskomponentit ja peruslait (työkalut). Laske jännitteet U ja U_{J}. $E = 7$ V, $J = 2$ A, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$.



Vastuksen R_1 molemmilla puolilla kulkee sama virta I_{E}, samoin lähdevirta J kulkee R_3:n molemmilla puolilla. Virtalähde J on tavallaan säädettävä jännitelähde, joka säätää oman jännitteensä U_{J} siten, että sen virta $I = J$. Virtalähteet ovat yleensä elektroniikan komponentteja.

Jännitenuolien suunnat: R:ssä virran suuntaan, E:ssä plussasta miinukseen, J:ssä vapaa valinta! Seuraavat seikat voit yleensä itse valita vapaasti:

- Haaravirtojen nimet ja suunnat
- Jännitenuolten nimet ja paikat (= nuolen päätepisteet)
- Jänniteyhtälöiden (KJL) reitit
- Virtayhtälöiden (KCL) solmut
- Yhtälöryhmän ratkaisutapa

Sovelletaan Kirchhoffin jännitelakia vasempaan ikkunaan:

$$-E + R_1 I_{\mathrm{E}} + R_2 I_2 = 0 \Rightarrow -E + R_1 I_{\mathrm{E}} + R_2 (\underbrace{I_{\mathrm{E}} + J}_{I_2}) = 0 \tag{1}$$

Vaihtoehtoinen etumerkkisääntö johtaisi samoihin tuloksiin:

$$E - R_1 I_{\mathrm{E}} - R_2 I_2 = 0 \tag{2}$$

Tärkeintä on, että E:llä on eri etumerkki kuin vastusten jännitteillä, koska sen nuoli osoittaa kiertosuunnan kannalta eri suuntaan. Kiertosuuntahan voi olla kumpi vain. Virtalain mukaan $I_2 = I_{\mathrm{E}} + J$. Ratkaistaan tuntematon virta I_{E} ja sen avulla U:

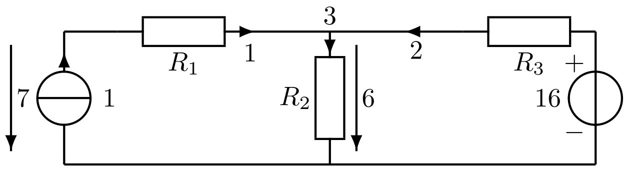
$$I_{\mathrm{E}} = \frac{E - R_2 J}{R_1 + R_2} = \frac{7 - 2 \cdot 2}{1 + 2} = 1 \tag{3}$$

$$I_2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow U = R_2 I_2 = 6 \text{ V} \tag{4}$$

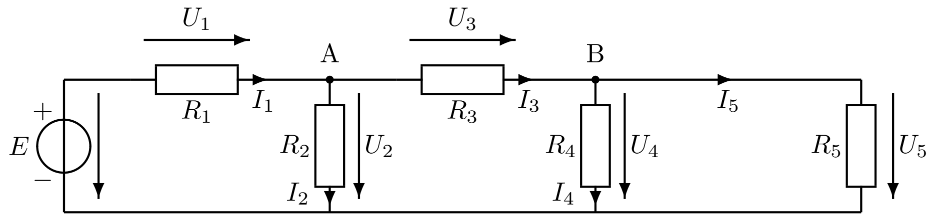
Toisen ikkunan yhtälöä tarvitaan ainoastaan virtalähteen jännitteen U_{J} laskemiseen:

$$-R_2 I_2 - R_3 J + U_{\mathrm{J}} = 0 \Rightarrow U_{\mathrm{J}} = R_2 I_2 + R_3 J = 16 \text{ V} \tag{5}$$

Kuten huomataan virtalähde ei pysty syöttämään piiriin 2 ampeerin nimellisvirtaansa, ellei se säädä jännitettään 16 volttiin. Alla on piiri, jonka virrat ja jännitteet olisivat samat kuin edellä, vaikka lähteiden tyypit on vaihdettu. Kuvan jännite- ja virtalähteiden arvot perustuvat tietenkin edellä olleisiin laskelmiin.



103. Tyyppitapaus, peruslakimenetelmä. Kirjoita piirille 2 yhtälöä Kirchhoffin virtalain ja 3 yhtälöä Kirchhoffin jännitelain mukaan. Ratkaise I_5. $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 1\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$, $E = 2$ V.



E:n ja vastusten R_2, R_4, R_5 liitoskohta kannattaa tulkita yhdeksi solmupisteeksi. Virtayhtälöitä on järkevää kirjoittaa yksi vähemmän kuin haarautumiskohtien lukumäärä; nyt siis kaksi virtayhtälöä esim. solmuille A ja B. Jänniteyhtälöitä kirjoitetaan yhtä monta kuin piirin ikkunaruutujen lukumäärä; usein on helpointa valita jänniteyhtälöt kiertämäänkin juuri yksittäisten ikkunaruutujen karmeja pitkin:

$$\begin{cases} \mathrm{A}: \ I_1 = I_2 + I_3 \\ \mathrm{B}: \ I_3 = I_4 + I_5 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \mathrm{C}: \ -E + U_1 + U_2 = 0 \\ \mathrm{D}: \ -U_2 + U_3 + U_4 = 0 \\ \mathrm{F}: \ -U_4 + U_5 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Saadaan viiden lineaarisen yhtälön ryhmä, joka voidaan ratkaista monella eri tavalla. Oppikirjassa on esitetty, miten kaikki "kehittyneemmät" piirianalyysimenetelmät ovat näin muodostettujen yhtälöiden sovelluksia.

Lausutaan jännitteet virtojen avulla, jolloin tuntemattomien määräksi tulee odotetusti sama kuin yhtälöiden määrä. Koska lukuarvot ovat yksinkertaiset, sijoitetaan ne heti yhtälöihin.

$$\begin{cases} \mathrm{A}: \ I_1 = I_2 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5 \\ \mathrm{B}: \ I_3 = I_4 + I_5 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \mathrm{C}: \ E = R_1 I_1 + R_2 I_2 \Rightarrow 2 = I_1 + I_2 \\ \mathrm{D}: \ R_2 I_2 = R_3 I_3 + R_4 I_4 \Rightarrow I_2 = I_3 + I_4 \\ \mathrm{F}: \ R_4 I_4 = R_5 I_5 \Rightarrow I_4 = I_5 \end{cases} \tag{9}$$

Ratkaistaan aluksi I_1, I_3 ja I_4 yhtälöistä A, B ja F:

$$\mathrm{F}: \ I_4 = I_5 \tag{10}$$

$$\mathrm{B}: \ I_3 = 2I_5 \tag{11}$$

$$\mathrm{A}: \ I_1 = (I_2 + 2I_5) \tag{12}$$

Sijoitetaan tulokset loppuihin yhtälöihin C ja D, jotta tuntemattomat I_1, I_3 ja I_4 eliminoituvat:

$$\mathrm{D}: \ I_2 = 2I_5 + I_5 = 3I_5 \tag{13}$$

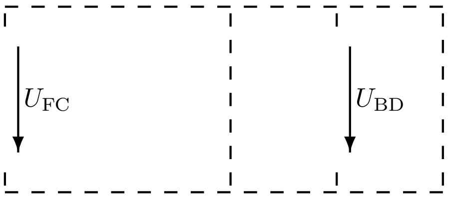
$$\mathrm{C}: \ 2 = (I_2 + 2I_5) + I_2 = 2I_2 + 2I_5 = 6I_5 + 2I_5 \Rightarrow I_5 = 0{,}25 \text{ A} \tag{14}$$

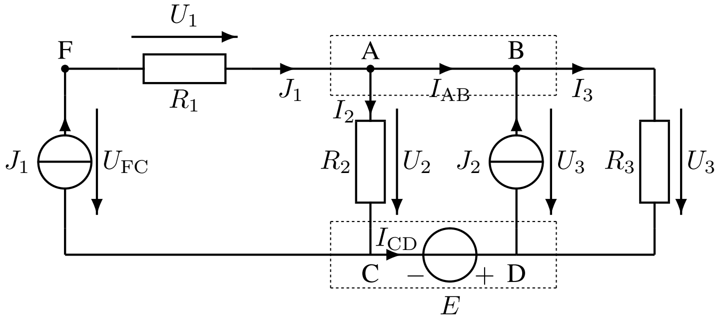
Optimi määrä yhtälöitä: KCL joka solmuun, paitsi ei yhteen (solmuiksi kannattaa laskea vain kolmen tai useamman johdon liitoskohdat). KJL joka ruutuun, kun piiri on piirretty tasoon (virtalähteen kautta sulkeutuvia ruutuja ei välttämättä kannata noteerata; vrt. tehtävä 102).

102. Yhtälöiden kirjoittaminen. Laske vastusten jännitteet Kirchhoffin lakien avulla. $E = 2$ V, $J_1 = 2$ A, $J_2 = 2$ A, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$.

Kun lasketaan tarvittavaa jänniteyhtälöiden määrää, voidaan J:t yleensä katkaista. Virtayhtälöiden määrää laskettaessa voidaan E:t yleensä oikosulkea. Sellaiselle silmukalle, joka sulkeutuu virtalähteen kautta, ei siis tarvitse kirjoittaa jänniteyhtälöä, ellei virtalähteen jännitettä kysytä. Jos jännitelähde (ilman sarjavastusta) on kahden solmun välissä, kannattaa nämä solmut käsitellä yhtenä "säiliönä", ellei jännitelähteen virtaa erityisesti kysytä.

Vasemmalla piirin luurankokaavio, josta näkyy selkeästi tarvittava yhtälöiden määrä (1 ikkuna, 2 haarautumiskohtaa); siis 1+1 yhtälöä.





I_{AB} voitaisiin tarvittaessa laskea kirjoittamalla haarautumiskohdille A ja B erilliset yhtälöt, samoin I_{CD} saataisiin solmujen C ja D virtayhtälöiden avulla. Nyt näiden ratkaiseminen ei ole tarpeen. Aloitetaan yläsäiliön (katkoviivalaatikko) virtayhtälöllä. Lausutaan virrat jännitteiden avulla tuntemattomien määrän vähentämiseksi.

$$J_1 + J_2 = I_2 + I_3 = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} \tag{15}$$

Huomaa, että U_3 on samalla sekä J_2:n, että R_3:n jännite, koska kyseiset osat ovat rinnankytkettyjä. Kirchhoffin jännitelaki ainoasta ehjästä ikkunan karmista:

$$-U_2 + U_3 + E = 0 \Rightarrow U_2 = U_3 + E \tag{16}$$

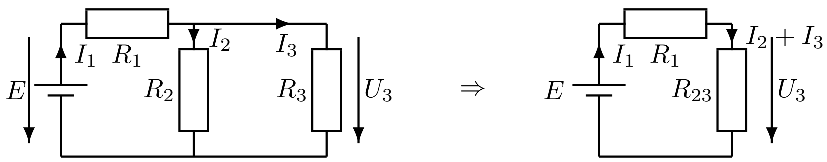
Muodostuneesta yhtälöparista on helppoa ratkaista kaksi tuntematonta:

$$J_1 + J_2 = \frac{U_3 + E}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} \Rightarrow U_3 = \frac{J_1 + J_2 - \frac{E}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 4 \text{ V} \qquad U_2 = U_3 + E = 6 \text{ V} \tag{17}$$

$$U_1 = R_1 J_1 = 4 \text{ V} \tag{18}$$

U_1 nähtiin suoraan kuvasta.

104. Tasavirran teho. Laske R_2:n ja R_3:n rinnan kytkennän resistanssi R_{23} ja sen avulla R_3:n ottama teho P_3. $E = 1$ V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$.



Vastusten rinnankytkennän kaavan voi kirjoittaa kolmessa eri muodossa:

$$G_{23} = G_2 + G_3 \Rightarrow \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 40\ \Omega \tag{19}$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{23}} = \frac{1}{140} \text{ A} \tag{20}$$

$$U_3 = R_{23} I_1 = \frac{2}{7} \text{ V} \tag{21}$$

Myös teholla on kolme eri kaavaa; jos virtaa I_3 halutaan käyttää, se on ratkaistava alkuperäisestä kuvasta:

$$\left(I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1 \right) \tag{22}$$

$$P_3 = U_3 I_3 = R_3 I_3^2 = \frac{U_3^2}{R_3} = 1{,}63 \text{ mW} \tag{23}$$

Huomaa tasajännitelähteen piirrosmerkki. Vaihtovirralla teho lasketaan eri tavalla (vrt. harjoitus 4).

Harjoitus 2, sivut 63-66, 71-76, 81-87, (112), sekä erityisesti 113-124.

Vastus, kela ja kondensaattori sekä niihin liittyvät suureet ja yksiköt, virran ja jännitteen välinen yhtälö L:ssä ja C:ssä, RC- ja RL-piirin differentiaaliyhtälöiden kirjoittaminen Kirchhoffin lakien avulla ja yhtälöiden ratkaiseminen esimerkiksi yritteitä käyttämällä.

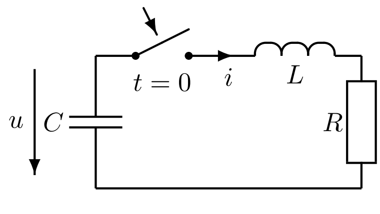
201. Virtauskenttä, staattinen magneettikenttä ja staattinen sähkökenttä.
a) Poikkileikkaukseltaan pyöreän kuparijohdon pituus $l = 0{,}2$ m ja säde $r = 1$ mm. Laske johdon konduktanssi G, resistanssi R sekä virtaa $I = 1$ A vastaava sähkökentän voimakkuus E ja virran tiheys J johtimen sisällä ($\sigma = 57$ MS/m).
b) Suoran ilmasydämisen lieriökäämin kierrosmäärä $N = 100$, pituus $l = 0{,}2$ m ja säde $r = 5$ mm. Laske käämin induktanssi L sekä kelasydämessä vaikuttava magneettikentän voimakkuus H ja magneettivuon tiheys B, kun virta $I = 1$ A ($\mu_\mathrm{r} = 1$).
c) Tasokondensaattorin levyjen pinta-ala $A = 5$ mm $\cdot$ 2 mm, levyjen välinen etäisyys $l = 0{,}1$ mm ja eristeen suhteellinen dielektrisyysvakio $\varepsilon_\mathrm{r} = 10$. Laske kapasitanssi C sekä levyjen välissä vaikuttava sähkökentän voimakkuus E ja sähkövuon tiheys D jännitteen ollessa $U = 1$ V.

Tämä tehtävä lasketaan suoraan kaavakokoelman (kako) kaavoilla. Tarkoituksena on skannata pikaisesti läpi tärkeimpiä perussuureita ja yksiköitä. Vain harvoja näistä tarvitaan myöhemmin kurssilla. Osan tuloksista voi laskea monella eri tavalla. Kiinnitä huomiota sarakkeiden väliseen synergiaan; kaikessa erilaisuudessaan tehtävän kolme perustapausta edustavat tavallaan yksinkertaisinta perusrakennetta kyseisessä kenttätyypissä. Tällöin kaavat eri sarakkeissa ovat lähes identtiset, vaikka kirjaimissa onkin eroa. Kirjassa on selitetty perusteellisesti, mitä eri suureet merkitsevät käytännössä. Kannattaa lukea, vaikka en kysykään näitä seikkoja kokeissa.

Virtauskenttä (sähkövarausten)	Staattinen magneettikenttä	Staattinen sähkökenttä
$A = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-6}$ m^2	$A = 78{,}5 \cdot 10^{-6}$ m^2	$A = 10 \cdot 10^{-6}$ m^2
$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A} = 1{,}12$ mΩ		
	$\mu = \mu_\mathrm{r}\mu_0 = 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	$\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 = 10 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m
$G = \sigma \frac{A}{l} = 895$ S	$L = N^2 \mu \frac{A}{l} = 0{,}00493$ mH	$C = \varepsilon \frac{A}{l} = 8{,}854$ pF
$E = \frac{U}{l} = \frac{RI}{l} = 0{,}00558$ V/m	$H = \frac{U_\mathrm{m}}{l} = \frac{NI}{l} = 500$ A/m	$E = \frac{U}{l} = 10$ kV/m
$J = \sigma E = \frac{I}{A} = \frac{GU}{A} = 318$ kA/m^2	$B = \mu H = \frac{\phi}{A} = \frac{\psi}{NA} = \frac{LI}{NA} = 628\ \mu$T	$D = \varepsilon E = \frac{Q}{A} = \frac{CU}{A} = 885{,}4$ nAs/m^2

Staattisessa kentässä varaukset ovat paikallaan. Luonto on sen verran vajavainen, että magneettivarausten virtauskentälle ei vielä ole keksitty omaa saraketta ;-)

202. Kelan ja kondensaattorin jännite ja virta. Kondensaattori on varattu jännitteeseen $U_\mathrm{C0} = 10$ V. Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$. Piirissä alkaa kulkea virta $i = A\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin\omega t$. Kondensaattorin jännite on muotoa $u = (D\cos\omega t + E\sin\omega t)\mathrm{e}^{-t/\tau}$, kun $t \geq 0$. $A = 1$ A, $C = 40\,000\ \mu$F $= \frac{1}{25}$ F, $L = 5$ H, $R = 10\ \Omega$, $\omega = 2\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, $\tau = 1$ s. Kuinka suuria ovat kertoimet D ja E?



Kelan ja kondensaattorin jännite ja virta riippuvat toisistaan differentiaaliyhtälön kautta. Vastuksessa vastaava yhtälö on Ohmin laki. Vain tasavirralla ja jatkuvassa sinimuotoisessa tapauksessa (viikot 1 ja 3-5) ei differentiaaliyhtälöitä tarvita. Koska virran ja jännitteen lausekkeet on tehtävässä annettu, jää ongelmaksi ainoastaan kertoimien lukuarvojen määrääminen. Kerroin D voidaan laskea esim. kondensaattorin alkujännitteen avulla:

$$U_\mathrm{C0} = (D\cos 0 + E\sin 0)\mathrm{e}^0 = D \Rightarrow D = 10\ \mathrm{V} \tag{24}$$

Lausutaa Kirchhoffin virtalaissa kelan ja vastuksen jännite virran avulla. Kondensaattorissa tätä ei kannata tehdä, koska konkan jännitteen lauseke annettiin tehtävässä (huom! U_C0 on tämän lausekkeen alkuarvo, kun $t = 0$).

$$-u + u_\mathrm{L} + u_\mathrm{R} = 0 \Rightarrow -u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \tag{25}$$

Sijoitetaan u:n ja i:n lausekkeet kertoimien määrittämiseksi:

$$-(D\cos\omega t + E\sin\omega t)\mathrm{e}^{-t/\tau} + LA\left(-\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin\omega t + \mathrm{e}^{-t/\tau}\omega\cos\omega t\right) + RA\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin\omega t = 0 \tag{26}$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet $\mathrm{e}^{t/\tau}$:lla, jotta lauseke siistiytyy:

$$-(D\cos\omega t + E\sin\omega t) + LA\left(-\frac{1}{\tau}\sin\omega t + \omega\cos\omega t\right) + RA\sin\omega t = 0 \tag{27}$$

Kerätään sinit ja kosinit omiin paketteihinsa:

$$(-D + LA\omega)\cos\omega t + \left(RA - E - LA\frac{1}{\tau}\right)\sin\omega t = 0 \tag{28}$$

Koska yhtälön tulee toteutua kaikilla (positiivisilla) t:n arvoilla, on kosinin ja sinin kertoimien oltava erikseen nollia toisistaan riippumatta:

$$\underbrace{(-D + 10)}_{D=10\ \mathrm{V}}\cos\omega t + \underbrace{(10 - E - 5)}_{E=5\ \mathrm{V}}\sin\omega t = 0 \text{ kaikilla } t\text{: n arvoilla!} \tag{29}$$

Jos $\sin\omega t$ olisi nolla, tulisi kosinin kertoimen olla nolla, koska kosini itse ei tällöin ole nolla. Muilla t:n arvoilla kosinin kerroin on edelleen nolla, koska se ei riipu ajasta. Tällöin myös sini kertoimen on oltava nolla, jotta koko lauseke saa arvon nolla t:n arvosta riippumatta.

Perustelut tehtävän lausekkeille (menee hiukan yli kurssivaatimusten):

Lausutaan jännitteet virran avulla:

$$-u + u_\mathrm{L} + u_\mathrm{R} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{1}{C}\int_0^t(-i)\mathrm{d}t + U_{\mathrm{C0}}\right) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \tag{30}$$

Derivoidaan yhtälö puolittain integraalimerkin poistamiseksi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|\bigg| -\left(\frac{1}{C}\int_0^t(-i)\mathrm{d}t + U_{\mathrm{C0}}\right) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \tag{31}$$

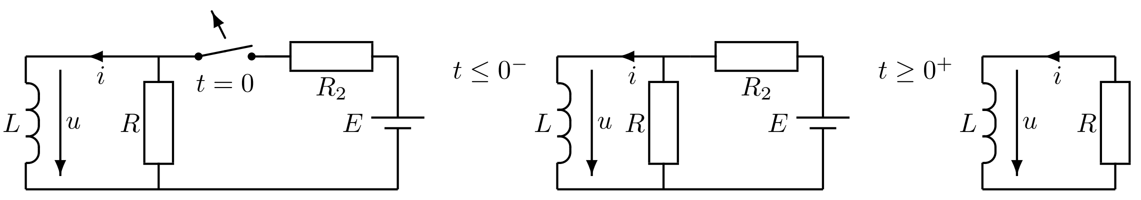
$$\Rightarrow \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{32}$$

Ratkaistaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä virta i ja sen avulla lopuksi jännite u:

$$i = 1\cdot\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin\omega t \tag{33}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{C}\int_0^t(-i)\mathrm{d}t + U_{\mathrm{C0}} = (10\cos\omega t + 5\sin\omega t)\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{34}$$

203. Muutosilmiö, raja-arvot. Laske kelan virta i ja jännite u ajan funktiona, kun tasajännitelähde irrotetaan piiristä avaamalla kytkin hetkellä $t = 0$. Laske myös kelan virta ja jännite juuri ennen kytkimen avaamista: $i(0^-)$ ja $u(0^-)$ ja heti sen jälkeen: $i(0^+)$ ja $u(0^+)$. $L = 100$ mH, $R = 1$ kΩ, $R_2 = 10$ Ω, $E = 10$ V. Tehtävää on hieman muutettu vuonna 2005.



Kelaan on varastoitunut energiaa, kun sen läpi on syötetty virtaa. Virta kelassa ei katkea heti, vaikka jännitelähde irrotetaan piiristä. Induktanssi on vakiotasavirralla oikosulku $\left(u = u(0^-) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0\right)$. Siksi ennen kytkimen avaamista kaikki virta menee kelan läpi. Virta on kuitenkin sama heti kytkimen avaamisen jälkeen $(i(0^+) = i(0^-))$, koska kelan energiavarasto $\left(w = 0{,}5\cdot Li^2\right)$ on verrannollinen virran hetkellisarvoon. Kelan alkuvirtaa merkitään kahdella eri tavalla.

$$i(0) = I_{\mathrm{L0}} = \frac{E - u(0^-)}{R_2} = 1\ \mathrm{A} = i(0^-) = i(0^+) \tag{35}$$

$$u(0^+) = -Ri(0^+) = -1000\ \mathrm{V} \tag{36}$$

Kun kytkin on avattu, tunkee kela virtaansa vastukseen niin kauan kuin energiavarastoa riittää. Virran lauseke määräytyy differentiaaliyhtälön ratkaisuna:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = 0 \qquad \leftarrow i = A\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{37}$$

Differentiaaliyhtälössä tuntematon virta tai jännite on yleensä sekä funktiona, että derivoitavana. Vain poikkeustapauksessa differentiaaliyhtälön ratkaisuna voi olla jokin vakiovirta tai vakiojännite. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisut ovat aina tietyntyyppisiä Neperin luvun sisältäviä funktioita (vrt. kaavakokoelma). Tässä $i = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ (yrite). Tällöin tehtäväksi jää toistaiseksi tuntemattomien kertoimien A, B, τ määrittäminen. Nyt $B = 0$, mikä näkyy diffisyhtälön muodosta (ei summattavaa vakiotermiä). Sijoitetaan yrite yhtälöön:

$$-L\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} + RA\mathrm{e}^{-t/\tau} = 0 \Rightarrow \tau = \frac{L}{R} = 0{,}1 \text{ ms} \tag{38}$$

τ on aikavakio, joka kuvaa muutosilmiön nopeutta; se on selvästi lyhyempi kuin muutosilmiön koko kestoaika (teoriassa ääretön). Kerroin A sAAdAAn AinA AlkuArvostA, joka voidaan usein päätellä kytkentäkaavion perusteella (nyt $i(0) = E/R_2$):

$$i(0) = A\mathrm{e}^{-0/\tau} = A \Rightarrow A = \frac{E}{R_2} \tag{39}$$

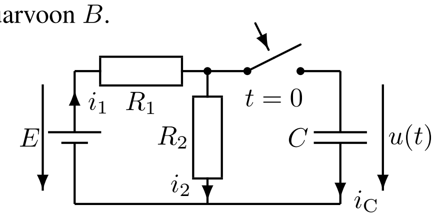
Kun vakiot on ratkaistu, voidaan tulokset koota yhteen:

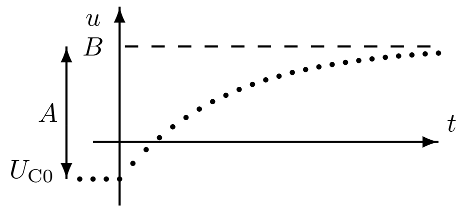
$$i(t) = \frac{E}{R_2}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} = \mathrm{e}^{-t/0{,}1 \text{ ms}} \text{ A} \tag{40}$$

$$u(t) = -Ri(t) = -1000 \cdot \mathrm{e}^{-t/0{,}1 \text{ ms}} \text{ V} \tag{41}$$

t sekunteina. Kela pyrkii jatkamaan virran kulkua, vaikka lähde on irrotettu piiristä. Tätä ilmiötä hyödynnetään mm. tietokoneiden hakkuriteholähteissä.

204. Muutosilmiö. Laske jännite u ajan funktiona, kun kondensaattori liitetään piiriin hetkellä $t = 0$. $C = 100$ μF, $R_1 = R_2 = 10$ kΩ, $U_{C0} = -2$ V, $E = 10$ V (tasajännite). Oikealla jännitteen muuttuminen alkuarvosta U_{C0} loppuarvoon B.





Piirin differentiaaliyhtälö kytkimen sulkemisen jälkeen:

$$-E + R_1 \underbrace{\left(\frac{u}{R_2} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)}_{i_1 = i_2 + i_C} + u = 0 \tag{42}$$

Koska yhtälössä on summattava vakiotermi $-E$, tarvitaan pitempää yritettä ($B \neq 0$). Voit käyttää pitempää yritettä vaikka aina. Koska A voi olla positiivinen tai negatiivinen, voi sen etumerkki olla yritteessä kumpi vain. Yrite on muodoltaan samanlainen niin virralle kuin jännitteellekin. Sijoitetaan yrite yllä olevaan piiriyhtälöön.

$$u = B + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{43}$$

$$-E + \frac{R_1 + R_2}{R_2}\,(B + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) - R_1 C\,\frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \tag{44}$$

Tämän yhtälön on toteuduttava kaikilla t:n arvoilla kytkimen sulkemisen jälkeen. Vakio-osan täytyy olla nolla, jotta yhtälö toteutuisi, kun $\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ eli $t = \infty$. Kun kerran vakio-osa on nolla, täytyy myös ajasta riippuvan osan olla nolla muillakin t:n arvoilla kuin huitsin suurilla:

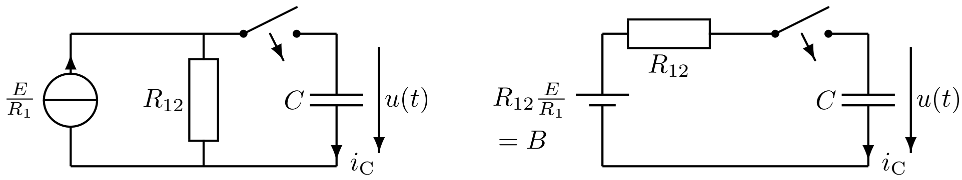
$$\begin{cases} -E + \frac{R_1+R_2}{R_2}\,B = 0 \Rightarrow B = \frac{R_2}{R_1+R_2}\,E = \frac{E}{2} = 5 \text{ V} \\ \underbrace{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\,A - R_1 C\,\frac{A}{\tau}\right)}_{0} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\,C = R_{12}C = 0{,}5 \text{ s} \end{cases} \tag{45}$$

Lopuksi A alkuarvosta:

$$U_{C0} = u(0) = B + A\mathrm{e}^{-0} = B + A \Rightarrow A = U_{C0} - B = -7 \text{ V} \tag{46}$$

$$u = u(t) = 5 - 7\mathrm{e}^{-2t} \text{ V}\ ,\ (t \text{ sekunteina}) \tag{47}$$

Tuloksen tulkinta lähdemuunnoksella (menee yli kurssivaatimusten):



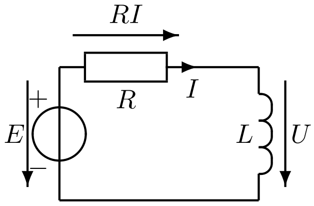
Kelan ja konkan muutosilmiöt tietyissä tilanteissa:

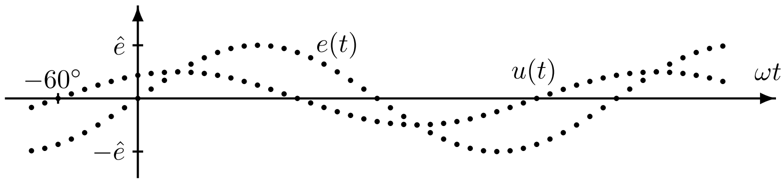
i_L tai u_C	$u_L = L\,\frac{di_L}{dt}$ tai $i_C = C\,\frac{du_C}{dt}$
vakio	0
kasvaa lineaarisesti eli suoraviivaisesti	positiivinen vakio
pienenee lineaarisesti eli suoraviivaisesti	negatiivinen vakio
kasvaa kuperaa eksponenttikäyrää pitkin	pienenee koveran eksponentikäyrä mukaisesti
pienenee koveraa eksponentikäyrää pitkin	kasvaa kuperan eksponenttikäyrän mukaisesti

Harjoitus 3, sivut 139-157.

Vaihtovirran tehollisarvo ja hetkellisarvo, kompleksinen jännite ja virta, impedanssi ja admittanssi, muunnokset summa- ja kulmamuodon välillä, yleistetty Ohmin laki. Vaihtovirtalaskut kompleksiluvuilla. Tosi tärkeä harjoitus!

301. Osoitinlaskenta. Kuvan piirissä on sinimuotoinen jännitelähde E. Laske kelan jännite osoitinlaskennalla (kompleksiluvut). $E = 44\angle 0°$ V, $f = 50$ Hz, $R = 10\ \Omega$, $L = 18{,}38$ mH.





Oheinen käyrä u on piirretty tehtävässä lasketun U:n perusteella. Aika-akseli kerrottuna kulmataajuudella ω tarkoittaa kulmaa; positiivisten huippujen välimatka on 360°.

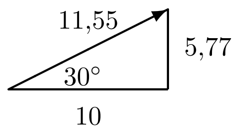
Jatkuvassa sinimuotoisessa tapauksessa differentiaaliyhtälöesitys voidaan korvata kompleksiluvuilla. "Jatkuva" tarkoittaa sitä, että jännite on ollut kytkettynä piiriin jo vähän aikaan, jotta muutosilmiöt ehtivät tasaantua (yllä olevan piirin aikavakio on alle 2 ms, joten sietämättömän pitkästä odottelusta ei ole kysymys). Kompleksilukulaskenta on selitetty perin pohjin kirjassa. Osoitinlaskennassa kela L ja kondensaattori C käsitellään impedanssina, jolle voi soveltaa vastuksen tapaan Ohmin lakia. Kerroin j on imaginääriyksikkö (sähkötekniikassa yleensä j eikä i).

$$-E + RI + \overbrace{Z_L I}^{U} = 0 \Rightarrow -E + RI + \mathrm{j}\overbrace{\omega}^{2\pi f \approx 314\ \frac{1}{\mathrm{s}}} LI = 0 \tag{48}$$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{R + \mathrm{j}\omega L} \tag{49}$$

$$U = \mathrm{j}\omega LI = \frac{\mathrm{j}\omega LE}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{\mathrm{j}314 \cdot 0{,}01838 \cdot 44}{10 + \mathrm{j}314 \cdot 0{,}01838} = \frac{\mathrm{j}254}{10 + \mathrm{j}5{,}77} \tag{50}$$

Jakolaskua varten osoittaja ja nimittäjä muunnetaan erikseen kulmamuotoon. Muunnos on ohjelmoitu lähes kaikkiin laskimiin — luennoitsija osannee käyttää laskintasi, kysy! Hätätilassa muunnoksen voi tehdä suorakulmaisen kolmion avulla (osoittajassa vaakakateetti on nolla):



Jakolaskussa osoittajan ja nimittäjän itseisarvot (hypotenuusat) jaetaan keskenään ja kulmat vähennetään toisistaan:

$$U = \frac{254\angle 90°}{11{,}55\angle 30°} = \frac{254}{11{,}55}\angle 90° - 30° = 22\angle 60°\ \mathrm{V}\ (\approx 11 + \mathrm{j}19\ \mathrm{V}) \tag{51}$$

$$I = \frac{44\angle 0°}{11{,}55\angle 30°} = 3{,}81\angle -30°\ \mathrm{A} \tag{52}$$

Tuloksen voi esittää myös summamuodossa, mutta kulmamuotoinen esitys on havainnollisempi; kokeessa hyväksytään kumpi vain. Kelassa jännitteen ja virran välillä on 90° vaihe-ero. Kompleksilukuna esitetystä tuloksesta on mahdollista laskea myös jännitteen tai virran hetkellisarvo; muunnoskaava perustuu sopimukseen.

$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 44 \sin(\omega t + 0°)\ \mathrm{V} \quad u(t) = \sqrt{2} \cdot 22 \sin(\omega t + 60°)\ \mathrm{V} \quad i(t) = 5{,}39 \sin(\omega t - 30°)\ \mathrm{A} \tag{53}$$

Kulmamuoto on havainnollisin tapa ilmoittaa jännite tai virta, koska kompleksiluvun itseisarvo on sama kuin kyseisen suureen tehollisarvo eli 22 V. Kulma 60° kertoo vaihe-eron eli vaihesiirron sovittuun vertailukohtaan (esim. piirin jännitelähde, 0°) nähden. Nyt jännite U on 60° jännitettä E edellä (aika-akselilla kaikki tapahtuu aikaisemmin eli pienemmillä t:n arvoilla). Samoin U on 90° virtaa I edellä, kuten kelassa aina (kela pyrkii jarruttamaan virran kasvua — jännite ehtii kasvaa ensin). Jännitteen tai virran reaali- tai imaginääriosa yksinään ei kerro vielä yhtään mitään! Impedanssin, admittanssin tai tehon sopivin esitysmuoto riippuu tilanteesta.

Lopuksi vielä Kirchhoffin jännitelaki molemmissa kompleksilukumuodoissa ja vertailun vuoksi ajan funktiona ($RI = 33 - \mathrm{j}19 = 38{,}11\angle -30°$ V):

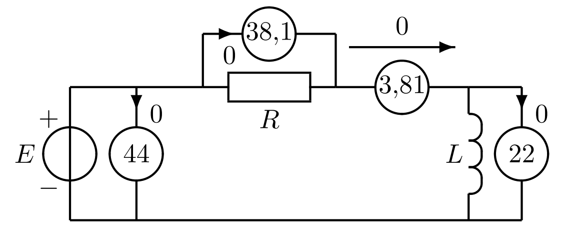
$$E = RI + U \Rightarrow \tag{54}$$

$$44 = (33 - \mathrm{j}19) + (11 + \mathrm{j}19) \Rightarrow \tag{55}$$

$$44\angle 0° = 38{,}11\angle -30° + 22\angle 60° \Rightarrow \tag{56}$$

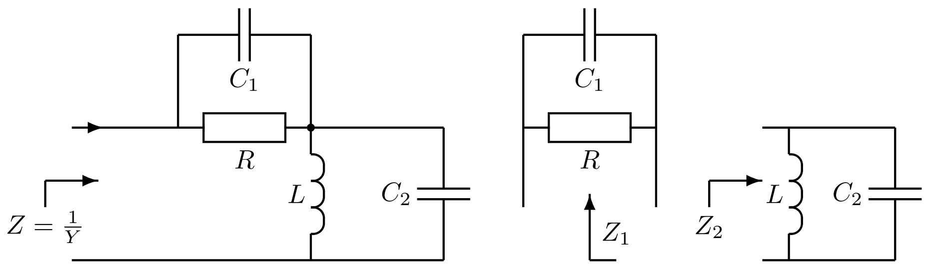
$$\underbrace{\sqrt{2} \cdot 44 \sin(\omega t)}_{e(t)} = \underbrace{\sqrt{2} \cdot 38{,}11 \sin(\omega t - 30°)}_{Ri(t)} + \underbrace{\sqrt{2} \cdot 22 \sin(\omega t - 60°)}_{u(t)} \tag{57}$$

Viime mainittu yhtälö pätee millä tahansa ajan t arvolla. Todista se sinien summan kaavalla. Yleismittarilukemat (tehollisarvoja):



Huomaa, että Kirchhoffin lait eivät päde jännitteen tai virran tehollisarvoille!

302. Impedanssi ja admittanssi. Laske oheisen piirin impedanssi. Ilmoita tulos kulmamuodossa. Paljonko on admittanssi summamuodossa? $R = 2\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C_1 = 250\ \mu$F, $C_2 = 500\ \mu$F, $\omega = 2000\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.



Tehtävän voi ratkaista käyttämällä joko Z:aa tai Y:tä tai molempia. Jaetaan piiri kahteen lohkoon Z_1 ja Z_2, jotka molemmat koostuvat osaimpedanssien rinnankytkennästä. (Vastusten) rinnankytkennän kaava ja osaimpedanssien lausekkeet voi katsoa kaavakokoelmasta.

$$Z_1 = \frac{R\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}} = \frac{R}{\mathrm{j}\omega C_1 R + 1} = \frac{2}{\mathrm{j} + 1} = \frac{2(1-\mathrm{j})}{2} = 1 - \mathrm{j} \tag{58}$$

$$Z_2 = \frac{\mathrm{j}\omega L \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{\mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{-\omega^2 L C_2 + 1} = \frac{\mathrm{j}2}{-2+1} = -2\mathrm{j} \tag{59}$$

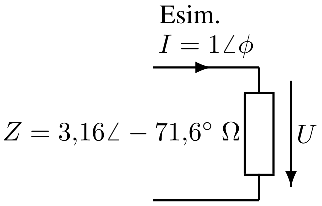
Sarjaankytketyt impedanssilohkot yhdistetään summaamalla:

$$Z = Z_1 + Z_2 = 1 - \mathrm{j} - 2\mathrm{j} = 1 - 3\mathrm{j} = 3{,}16\angle -71{,}6°\ \Omega \tag{60}$$

Admittanssi Y on aina impedanssin Z käänteisluku:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}3} = \frac{1 + \mathrm{j}3}{1^2 + 3^2} = (0{,}1 + \mathrm{j}0{,}3)\ \mathrm{S} \tag{61}$$

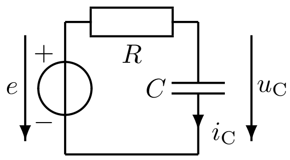
Sulut voi jättää summamuotoisesta vastauksesta poiskin. Impedanssin kulma tarkoittaa jännitteen ja virran välistä vaihe-eroa impedanssin navoissa. Impedanssin itseisarvosta näkee kuinka suuri olisi impedanssin jännitehäviö voltteina, jos sen virta olisi yksi ampeeri:



$U = ZI = 3{,}16\angle\phi - 71{,}6°$ V

$|Z| = 3{,}16\ \Omega$ kertoo siis jännitteen ja virran tehollisarvojen suhteen $\left(\Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right)$.

303. Hetkellisarvon laskeminen. Laske kondensaattorin virran ja jännitteen hetkellisarvot hetkellä $t = 5$ ms. $E = 10\angle 15°$ V eli $e(t) = \sqrt{2}\cdot 10\sin(\omega t + 15°)$ V, $f = 50$ Hz, $R = 2\ \Omega$, $C = 5/\pi$ mF.



Hetkellisarvot merkitään yleensä pienillä kirjaimilla ja tehollisarvot isoilla. Tehtävä menee auttamatta väärin, jos lausekkeeseen $e(t)$ sijoitetaan $t = 5$ ms, koska silloin jää mm. u_{R}:n ja u_{C}:n välinen vaihe-ero ottamatta huomioon: jännite e jakautuu vastuksen ja kondensaattorin kesken ajan funktiona vaihtelevassa suhteessa. Laskelmat on siis tehtävä kompleksiluvuilla. Hetkellisarvot liittyvät oikeastaan vain vastauksen esitysmuotoon: kompleksilukuvastauksesta voidaan laskea virran tai jännitteen hetkellisarvo millä tahansa t:n arvolla kaikissa muissakin tehtävissä.

Kulmataajuuden yksiköt 1/s ja rad/s tarkoittavat samaa asiaa:

$$\omega = 2\pi f = 100\pi\frac{1}{\mathrm{s}} = 100\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{62}$$

Lasketaan ensin jännite ja virta kompleksiluvuilla, tulos mieluiten kulmamuodossa:

$$-E + RI_{\mathrm{C}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I_{\mathrm{C}} = 0 \tag{63}$$

$$\begin{cases} I_{\mathrm{C}} = \frac{E}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega CE}{\mathrm{j}\omega CR+1} = \frac{0{,}5\angle 90°\,10\angle 15°}{\sqrt{2}\angle 45°} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle 60° \\ U_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}I_{\mathrm{C}} = \frac{E}{\mathrm{j}\omega CR+1} = \frac{10\angle 15°}{\sqrt{2}\angle 45°} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle -30° \end{cases} \tag{64}$$

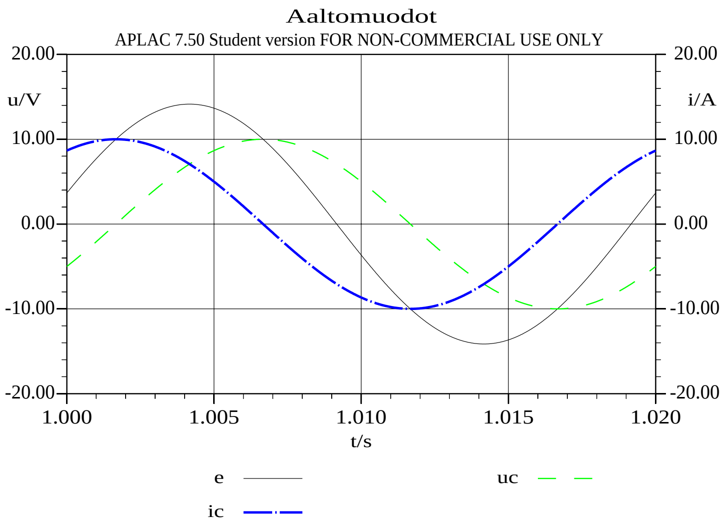
Muunnetaan tulokset ajan funktioiksi kompleksiesityksen määrittelykaavalla (vrt. E ja $e(t)$ tehtävässä):

$$\begin{cases} i_{\mathrm{C}}(t) = \sqrt{2}|I_{\mathrm{C}}|\sin(\omega t + 60°) = 5\sin(\omega t + 60°) \\ u_{\mathrm{C}}(t) = \sqrt{2}|U_{\mathrm{C}}|\sin(\omega t - 30°) = 10\sin(\omega t - 30°) \end{cases} \tag{65}$$

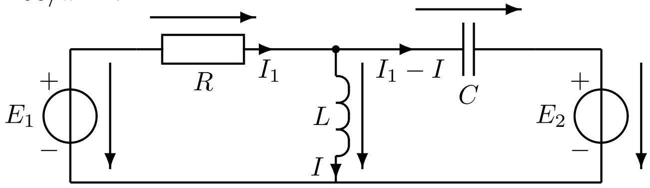
Itseisarvomerkit tarkoittavat siis kompleksiluvun pituutta (tehollisarvo). Hetkellisarvon laskemiseksi sijoitetaan aika $t = 5$ ms. Huomaa, että ωt antaa kulman radiaaneina, ellet ole varuillasi (toki saat käyttää radiaaneja, mutta tarkista, ettei laskimesi tarjoa graadeja):

$$\omega t = 100\pi\cdot 0{,}005 = 0{,}5\cdot 180° = 90° \tag{66}$$

$$\begin{cases} i_{\mathrm{C}}(5\ \mathrm{ms}) = 5\sin 150° = 2{,}5\ \mathrm{A} \\ u_{\mathrm{C}}(5\ \mathrm{ms}) = 10\sin 60° = 8{,}66\ \mathrm{V} \end{cases} \tag{67}$$



304. Tyyppitapaus, koetehtävän prototyyppi. Laske virta I. $E_1 = 10\angle 90^0$ V, $E_2 = 5\angle 0°$ V $= 5$ V, $R = 10\ \Omega$, $L = 25$ mH, $C = 500\ \mu$F, $f = 200/\pi$ Hz.



"Tyyppitapaus" tarkoittaa tässä kahta silmukkaa ja kompleksilukuja. **Tämän tehtävätyypin edustaja tulee yleensä kurssin kaikkiin tentteihin ja ensimmäisiin välikokeisiin.** Kirjoitetaan yhtälöt Kirchhoffin jännitelain mukaan kuten ensimmäisessä harjoituksessa. Ylemmästä yhtälöstä ratkaistaan I_1 virran I funktiona ja sijoitetaan lauseke alempaan yhtälöön.

$$\omega = 2\pi f = 400\ \frac{1}{\mathrm{s}} \tag{68}$$

$$\begin{cases} -E_1 + RI_1 + \mathrm{j}\omega LI = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - \mathrm{j}\omega LI}{R} = \frac{10\mathrm{j} - \mathrm{j}10I}{10} = \mathrm{j} - \mathrm{j}I \\ -\mathrm{j}\omega LI + \underbrace{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}_{-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = -\mathrm{j}5} (I_1 - I) + E_2 = 0 \end{cases} \tag{69}$$

$$\underbrace{\left(-\mathrm{j}\omega L + \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}\right)}_{(-\mathrm{j}10+\mathrm{j}5)} I - \mathrm{j}\underbrace{\frac{1}{\omega C}}_{\mathrm{j}5} I_1 + \underbrace{E_2}_{5} = 0 \tag{70}$$

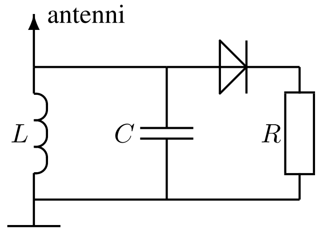
$$(-\mathrm{j}5)I - \mathrm{j}5(\mathrm{j} - \mathrm{j}I) + 5 = 0 \Rightarrow I = \frac{-5-5}{-\mathrm{j}5-5} = \frac{10}{\mathrm{j}5+5} = 1 - \mathrm{j} = \overbrace{\sqrt{2}}^{1{,}41} \angle -45°\ \mathrm{A} \tag{71}$$

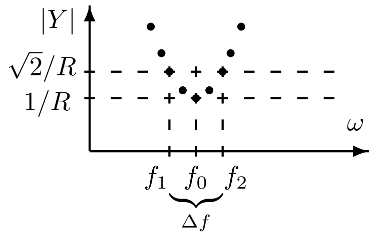
Kiinnitä huomiota viimeiseen jakolaskutoimitukseen — nimittäjän reaali- ja imaginääriosilla ei tietenkään saa erikseen jakaa. Opettele laskemaan tämä ja vastaavat muut tehtävät omin avuin — voit olla varma, että saat hyvän pistepotin kokeissa. Laskuvirheet, joita työläissä laskuissa toki helposti syntyy, arvostellaan lievästi — tärkeintä on oikea periaate. Lisätehtäviä ratkaisuineen on mm. kirjan nettisivulla sekä vanhojen kokeiden arkistossa. Nykyisin tämän tyypin tehtävät on — kaikesta työläydestään huolimatta — osattu laskea tenteissä loistavasti!

Harjoitus 4, sivut 157-165, (168-172), 173-181.

Resonanssi, suodattimet, siirtofunktion itseisarvo ja vaihe, kompleksinen teho, pätö-, lois- ja näennäisteho, tehokerroin.

405. Resonanssipiiri. Kidekone koostuu rinnakkaisresonanssipiiristä, diodista ja kuulokkeesta, joka näyttää resistanssilta, jonka arvo eri kuulokkeiden välillä voi vaihdella hyvinkin paljon; olkoon $R = 100$ kΩ. Diodin voi olettaa signaalitaajuudella oikosuluksi. Lieriökäämin pituus on $l = 43$ mm, halkaisija $d = 5$ mm ja sydämen suhteellinen permeabiliteetti $\mu_\mathrm{r} = 165$. Käämin kierrosmäärä $N = 130$. $C = 100$ pF. Laske piirin resonanssitaajuus f_0, hyvyysluku Q ja puolen tehon kaistanleveys $B_f = \Delta f$.





Kidekone on yksinkertainen laite, joka soveltuu AM-radiolähetysten vastaanottoon. Niitä vaan ei nykyään paljon enää Suomessa lähetetä. Jos kidekoneen liittää vahvistimeen (esimerkiksi mikrofoniliitäntä), voi varsinkin pimeään vuodenaikaan kuulla lukuisia ulkomaisia asemia. Diodin tulisi olla herkkä ilmaisindiodi (esim. germanium-diodi). Antenniksi soveltuu hyvin metriä pitempi johdon pätkä. Vastaanotettavan aseman taajuus määräytyy resonanssiehdon perusteella. Resonanssitaajuudella impedanssin ja/tai admittanssin imaginääriosa on nolla. Tällä taajuudella rinnakkaisresonanssipiirin läpi ei oikosulkeudu mitään maahan. Niin, sen maan voi jättää jopa kokonaan kytkemättä.

$$L = N^2\mu_r\mu_0\frac{A}{l} = N^2\mu_r\mu_0\frac{\pi\frac{d^2}{4}}{l} = 1{,}600\ \mathrm{mH} \tag{72}$$

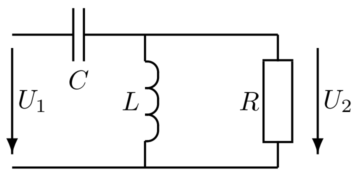
$$Y = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\underbrace{\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)}_{B=0} \tag{73}$$

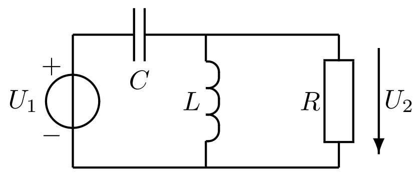
$$\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2{,}5 \cdot 10^6\,\frac{1}{\mathrm{s}} \Rightarrow f_0 = 398\ \mathrm{kHz} \tag{74}$$

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \omega_0 CR = 25 \Rightarrow B_f = \Delta f = \frac{f_0}{Q} = 15{,}9\ \mathrm{kHz} \tag{75}$$

Hyvyysluku Q kertoo sen, kuinka laaja taajuuskaista keskitaajuuden molemmin puolin kuuluu vastaanottimesta. Tarkempi määritelmä on kirjassa. Koska lähettimen kantoaalto on moduloitu signaalilla ei läpi mennyt taajuuskaista Δf saa olla liian kapea. Kaistaa tarvitaan audiokaistan verran keskitaajuuden molemmin puolin. AM-lähetyksissä signaalin taajuusalue on yleensä kavennettu noin viiteen kilohertsiin.

402. Suodatin, siirtofunktio, taajuusvaste. Laske jännitesiirtofunktio $\frac{U_2}{U_1}$ sekä siirtofunktion itseisarvo ja vaihe kulmataajuuksilla $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\omega = \sqrt{2}$ ja $\omega = \infty$ $\frac{1}{\mathrm{s}}$. Piirrä taajuusvaste. $R = 1\ \Omega$, $C = 1$ F, $L = 1$ H.





Siirtofunktiota laskettaessa laitetaan nimittäjän paikalle lähde (sopimus). Tämä on täysin verrattavissa tehtävään 304. Nyt vaan lasketaan tulos eri taajuuksilla. Jännitelähteen U_1 arvoksi on kätevää valita 1 V, mutta sen voi hyvin pitää myös kirjainsuureena. Yhdistämällä rinnankytketyt L ja R voidaan soveltaa jännitteenjakajan kaavaa.

$$Z = \frac{\mathrm{j}\omega LR}{\mathrm{j}\omega L + R} \tag{76}$$

$$U_2 = \frac{Z}{Z + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}U_1 = \frac{\mathrm{j}\omega CZ}{\mathrm{j}\omega CZ + 1}U_1 = \frac{\mathrm{j}\omega C\frac{\mathrm{j}\omega LR}{\mathrm{j}\omega L+R}}{\mathrm{j}\omega C\frac{\mathrm{j}\omega LR}{\mathrm{j}\omega L+R} + 1}U_1 \tag{77}$$

$$U_2 = \frac{\mathrm{j}\omega C\mathrm{j}\omega LR}{\mathrm{j}\omega C\mathrm{j}\omega LR + \mathrm{j}\omega L + R}U_1 = \frac{-\omega^2 CLR}{-\omega^2 CLR + \mathrm{j}\omega L + R}U_1 = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + \mathrm{j}\omega + 1}U_1 \tag{78}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1 - \mathrm{j}\omega} \Rightarrow \tag{79}$$

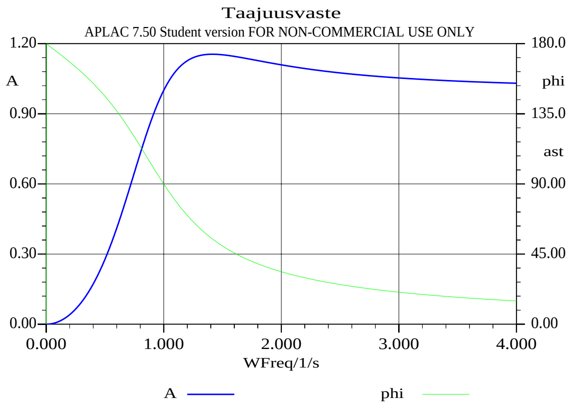
$$\frac{U_2}{U_1}(0) = \frac{0\angle 0^\circ}{1\angle \pm 180^\circ} = 0\angle 180^\circ \qquad (\mathrm{raja-arvo}) \tag{80}$$

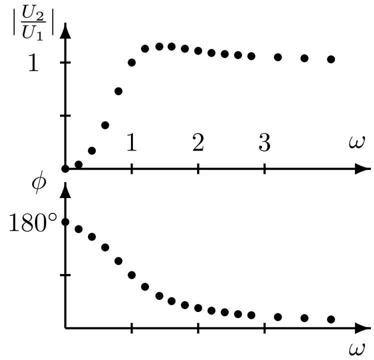
$$\frac{U_2}{U_1}(1) = \frac{1\angle 0^\circ}{1\angle -90^\circ} = 1\angle 90^\circ \qquad (\mathrm{referenssipiste}) \tag{81}$$

$$\frac{U_2}{U_1}(\sqrt{2}) = \frac{2}{2 - 1 - \mathrm{j}\sqrt{2}} = \frac{2\angle 0^\circ}{1{,}732\angle -54{,}7^\circ} = 1{,}15\angle 54{,}7^\circ \qquad (\mathrm{itseisarvon\ maksimi}) \tag{82}$$

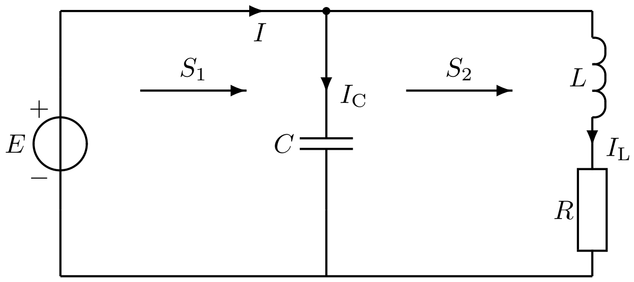
$$\frac{U_2}{U_1}(\infty) = \frac{\infty^2}{\infty^2 - 1 - \mathrm{j}\infty} = \frac{1\angle 0^\circ}{1 - \frac{1}{\infty^2} - \mathrm{j}\frac{1}{\infty}} = 1\angle 0^\circ \qquad (\mathrm{raja-arvo}) \tag{83}$$

Nollassa ja äärettömässä on laskettu raja-arvot. Jos itseisarvo on nolla, ei kulmalla ole varsinaisesti muuta merkitystä kuin käyrän päätepiste. Oikokulman ($\pm 180°$) etumerkki on aina vapaavalintainen; plus sopii tällä kertaa vastaukseen paremmin. Siirtofunktion arvo tietyllä taajuudella on kompleksiluku. Kulma tarkoittaa lähtö- ja tulojännitteen välistä vaihe-eroa ja itseisarvo jännitteiden suuruussuhdetta. Piiri on ylipäästösuodatin, jonka asteluku on 2 (1 L ja 1 C). Käyrät voi likimain piirtää neljän annetun taajuuspisteen tuloksista. Signaalinkäsittelyn kannalta ideaalinen itseisarvokäyrä (esim. rajataajuuden yläpuolella) olisi vaakasuora, ideaaliseksi vaihekäyräksi riittää käytännössä laskeva suora, edellyttäen, että taajuusakseli on lineaarinen. Yleensä on kuitenkin havainnollisempaa piirtää taajuusakseli logaritmisena (esim. taajuudet 1,2,4,8,... tai 1,10,100,... tasavälein).





403. Vaihtovirran teho, tärkeä! Laske pätö-, lois- ja näennäistehot $S_1 = S_{\rm CLR} = P_1 + {\rm j}Q_1$ ja $S_2 = S_{\rm LR} = P_2 + {\rm j}Q_2$. Laske vielä kuorman tehokerroin ilman C:tä ja sen kanssa. Vertaa virtoja I ja $I_{\rm L}$ toisiinsa. $E = 20\angle 90°$ V, $\omega = 2$ rad/s, $R = 2\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 0{,}1$ F.



Jännitelähde on kytketty suoraan molempien pystyhaarojen päihin — virrat on siis helppo laskea:

$$I_{\rm L} = \frac{E}{R + {\rm j}\omega L} = \frac{20{\rm j}}{2+4{\rm j}} = \frac{20{\rm j}(2-4{\rm j})}{4+16} = 4 + 2{\rm j}\ {\rm A} \tag{84}$$

$$I_{\rm C} = \frac{E}{\frac{1}{{\rm j}\omega C}} = {\rm j}\omega CE = -4\ {\rm A} \qquad \Rightarrow I = I_{\rm C} + I_{\rm L} = {\rm j}2\ {\rm A} \tag{85}$$

Kompleksiluvut aiheuttavat sen, ettei tehoa lasketa enää vanhalla kaavalla. Kompleksinen teho eli näennäisteho määritellään virran liittoluvun I^* avulla (liittoluvussa imaginääriosan etumerkki on vaihdettu, samoin kulman etumerkki vaihtuisi):

$$S_1 = U_1 I^* = EI^* = 20{\rm j}(-{\rm j}2) = 40\ {\rm VA} \tag{86}$$

$$S_2 = U_2 I_{\rm L}^* = EI_{\rm L}^* = 20{\rm j}(4-{\rm j}2) = 40 + {\rm j}80\ {\rm VA} \tag{87}$$

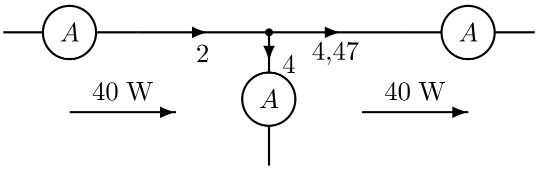
Näennäistehon reaaliosa on pätöteho P ja imaginääriosa loisteho Q. Vain pätöteholla on selvä fysikaalinen merkitys; myös sähkölaitos valvoo vain P:n kulutusta. Tästä asiasta on pitemmät sepustukset kirjassa. Selvyyden vuoksi tehon eri lajeilla on eri yksiköt:

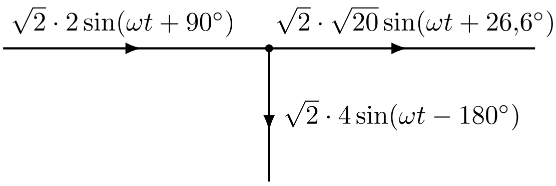
$$P_1 = 40\ {\rm W} \qquad Q_1 = 0\ {\rm VAr} \qquad \cos\phi_1 = \frac{P_1}{|S_1|} = 1 \tag{88}$$

$$P_2 = 40\ {\rm W} \qquad Q_2 = 80\ {\rm VAr} \qquad \cos\phi_2 = \frac{P_2}{\sqrt{P_2^2 + Q_2^2}} = 0{,}447_{\rm ind} \tag{89}$$

Tehokerroin $\cos\phi$ kertoo, miten suuri osa jännitteen ja virran tehollisarvojen tulosta saadaan pätötehoksi. Se riippuu luonnollisesti vaihe-erosta. Optimitilanteessa vaihe-ero on nolla ja $\cos\phi = 1$. Huomaa, että kondensaattori kompensoi loistehon. S_1 on puhdasta P:tä (pätötehoa). S_2:n reaaliosa on yhtä suuri kuin S_1:n, koska C ei kuluta pätötehoa (eikä myöskään L). Jännitelähteestä otettu virta I on C:n kanssa selvästi pienempi kuin ilman sitä ($I_{\rm L}$).

Oheiseen kuvaan on merkitty virran tehollisarvo; se olisi myös virtamittarin näyttämä. Huomaat, että Kirchhoffin virtalaki ei päde tehollisarvoille — ei myöskään jännitelaki (kompleksiluvuilla ja hetkellisarvoilla ne toki pätevät).





Voit laskea kokeeksi yllä olevien virtojen hetkellisarvot eri ωt:n arvoilla. Huom! ωt tarkoittaa kulmaa (esim. asteina).

Vaihtovirran teho kompleksiluvuilla lasketaan aina kaavasta $S = UI^*$, missä I^* tarkoittaa virran liittolukua (imaginääriosan merkki tai kulman merkki on vaihdettu). Ilman tähteä kaavalla ei ole mitään fysikaalista merkitystä, jos U ja I ovat kompleksilukuja. Muista tämä kokeissa. Yhteenvetoa:

1. Tasavirta $P = UI$
2. Vaihtovirran hetkellisarvot $p(t) = u(t)i(t)$
3. Vastus tasa- ja vaihtovirralla (mikä tahansa aaltomuoto tehollisarvoilla) $P = |UI| = |U||I|$
4. Sinimuotoinen vaihtovirta $P = |UI|\cos\phi$, $Q = |UI|\sin\phi$ (kompleksiluvun itseisarvo = tehollisarvo)
5. Kompleksiluvuilla $S = UI^* = P + \mathrm{j}Q$ (missä I^* tarkoittaa I:n liittolukua)
6. Sinimuotoisen vaihtovirran keskimääräinen teho $P = \mathrm{Re}[S] = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t$

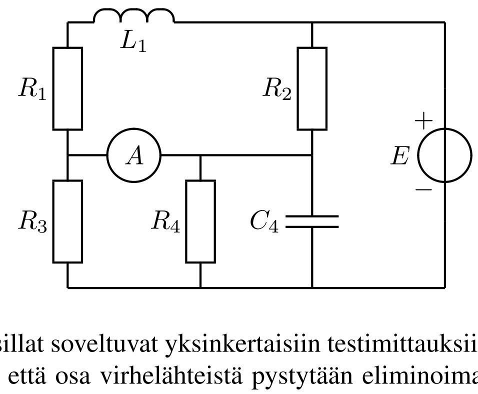
Kaikki muut kaavat ovat kohtien 2 tai 5 erikoistapauksia ja suoraan johdettavissa niistä. Koska tunnet kuitenkin jo kaavan 2, tarvitset jatkossa vain kaavaa 5!

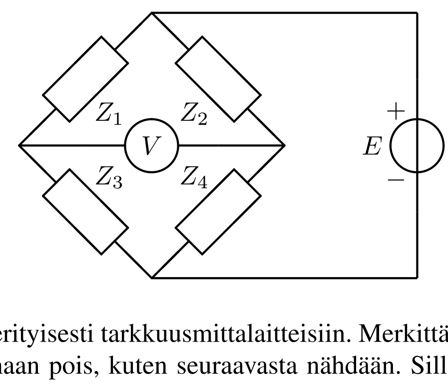
Tässä harjoituksessa on poikkeuksellisesti vain kolme tehtävää (johtuu varmaan turvallisuuskokeesta).

Harjoitus 5, sivut 184-198, 200-206, (207-218 on hyödyllinen).

Siltakytkennät, muuntajayhtälöt, keskinäisinduktanssi, muuntosuhde, ideaalimuuntaja, 3-vaihejärjestelmä, 1-vaiheinen sijaiskytkentä.

501. Mittasilta, tasapainoehto. Maxwell-Wienin induktanssisiltaa voidaan käyttää induktanssimittarina. Laske L_1 ja R_1, kun silta on säädetty tasapainoon esimerkiksi R_2:n ja R_4:n avulla. $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $C_4 = 1$ F. Oikealla silta yleisessä muodossa.





Mittasillat soveltuvat yksinkertaisiin testimittauksiin, mutta erityisesti tarkkuusmittalaitteisiin. Merkittävänä etuna on se, että osa virhelähteistä pystytään eliminoimaan kokonaan pois, kuten seuraavasta nähdään. Sillan tasapainoehto voidaan ottaa valmiina tuloksena. Kun sillan virta- tai vaihtoehtoinen jännitemittari näyttää nollaa, toteuttavat impedanssit kompleksisen yhtälön:

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \tag{90}$$

$$(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\frac{R_4 \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}}{R_4 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}} = R_2 R_3 \tag{91}$$

Osien jakautuminen impedansseihin $Z_1 \ldots Z_4$ määräytyy jännitelähteen ja mittarin liitäntäpisteiden perusteella. Kerrotaan nimittäjälauseke yhtälön oikealle puolelle (vrt. kerrossiivous):

$$(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)R_4\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4} = R_2 R_3\left(R_4 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}\right) \tag{92}$$

$$\frac{R_1R_4}{\mathrm{j}\omega C_4}+\frac{L_1R_4}{C_4}=R_2R_3R_4+\frac{R_2R_3}{\mathrm{j}\omega C_4} \tag{93}$$

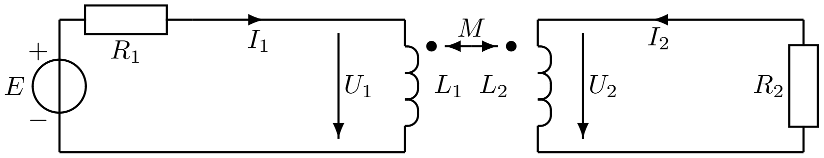
Koska reaali- ja imaginääriosa ovat täysin erilliset, on kummankin oltava molemmilla puolilla yhtä suuria (vrt. molemmilla puolilla yhtä paljon jauhoja ja munia[1]):

$$\begin{cases} \frac{R_1R_4}{\mathrm{j}\omega C_4}=\frac{R_2R_3}{\mathrm{j}\omega C_4}\Rightarrow R_1=\frac{R_2R_3}{R_4}=1{,}5\ \Omega \\ \frac{L_1R_4}{C_4}=R_2R_3R_4\Rightarrow L_1=C_4R_2R_3=6\ \mathrm{H} \end{cases} \tag{94}$$

Viimeisessä yhtälöparissa voisivat C_4 ja R_4 yhtä hyvin olla tuntemattomia, jos L_1 ja R_1 tunnettaisiin. Huomaa, että kelan käämilangan vastus on induktanssin kanssa sarjassa, mutta kondensaattorin eristeen vastus on kapasitanssin rinnalla. Kuten huomaamme, eivät E eikä ω vaikuta tulokseen, mikä onkin usein siltamittauksen etu.

Tehtävä 502. on korvattu käytännönläheisemmällä tehtävällä 538; aihepiiri on molemmissa sama.

502. Muuntaja, keskinäisinduktanssi. Laske muuntajan toisiojännite U_2. $L_1=\frac{0{,}04}{\pi}$ H, $L_2=\frac{1}{\pi}$ H, $M=\frac{0{,}2}{\pi}$ H, $f=50$ Hz, $E=20$ V, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=50\ \Omega$.



Kirchhoffin jännitelaki:

$$\begin{cases} U_1=\mathrm{j}\omega L_1I_1+\mathrm{j}\omega MI_2 \\ U_2=\mathrm{j}\omega MI_1+\mathrm{j}\omega L_2I_2 \end{cases} \tag{95}$$

$$\begin{cases} E=R_1I_1+U_1=(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)I_1+\mathrm{j}\omega MI_2 \\ 0=R_2I_2+U_2=\mathrm{j}\omega MI_1+(R_2+\mathrm{j}\omega L_2)I_2\Rightarrow I_1=\frac{R_2+\mathrm{j}\omega L_2}{-\mathrm{j}\omega M}I_2 \end{cases} \tag{96}$$

Sijoitetaan I_1 ylempään yhtälöön:

$$E=(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\frac{R_2+\mathrm{j}\omega L_2}{-\mathrm{j}\omega M}I_2+\mathrm{j}\omega MI_2 \tag{97}$$

Lopuksi ratkaistaan kysytty jännite U_2 virran I_2 avulla (tyypillisillä lukuarvoilla $M^2-L_1L_2=0$):

$$I_2=\frac{-\mathrm{j}\omega ME}{R_1R_2+\mathrm{j}\omega L_1R_2+\mathrm{j}\omega L_2R_1+\omega^2\underbrace{(M^2-L_1L_2)}_{0}} \tag{98}$$

$$U_2=-R_2I_2=\frac{20\,000\mathrm{j}}{100+\mathrm{j}400}=\frac{20\,000\angle 90^\circ}{412{,}3\angle 75{,}96^\circ}=48{,}5\angle 14^\circ\ \mathrm{V} \tag{99}$$

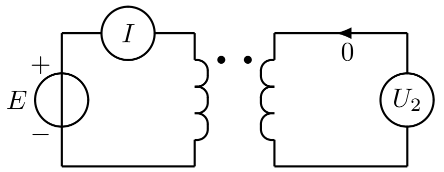
Lasketaan vertailun vuoksi epätarkan muuntosuhteen $n\approx\frac{L_1}{M}$ avulla U_2:n likiarvo. Tämä ei kyllä ole missään suhteessa suositeltava laskutapa, koska lopputulos on väärä!

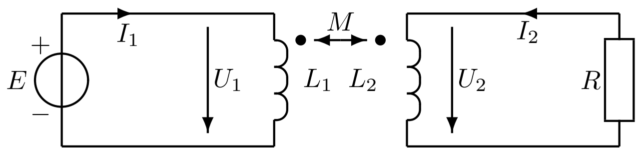
$$I_1\approx\frac{M}{L_1}I_2=\frac{M}{L_1}\frac{U_2}{R_2} \tag{100}$$

$$U_2=\frac{M}{L_1}[U_1]=\frac{M}{L_1}[E-R_1(I_1)]=\frac{M}{L_1}\left[E-R_1\left(\frac{M}{L_1}\frac{U_2}{R_2}\right)\right]\Rightarrow U_2=\frac{\frac{M}{L_1}E}{1+\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{M}{L_1}\right)^2}=50\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

Kun tulosta verrataan aiemmin tehtyyn tarkempaan laskelmaan, nähdään, että tehtävän lukuarvoilla $U_2\approx\frac{M}{L_1}U_1=\frac{L_2}{M}U_1$ ja lisäksi ensiö- ja toisiojännitteet ovat suunnilleen samanvaiheiset.

538. Muuntaja, keskinäisinduktanssi. Verkkomuuntaja ottaa tyhjäkäynnissä ($I_2=0$) verkkojännitteestä ($E=230$ V, $f=50$ Hz) virran $|I|=73{,}21$ mA, toisiojännitteen ollessa $|U_2|=12$ V. Käämiresistansseja tai muita muuntajan häviöitä ei oteta huomioon. Laske näiden tietojen nojalla muuntajan induktanssit sekä ensiö- ja toisiovirrat, jos kuormana on vastus $R=10\ \Omega$. Muuntajassa on tiukka kytkentä: $L_1L_2=M^2$.





[1] Tuli vähän naisnäkökulmaa mukaan — vai tuliko?

Muuntajia käsitellään kahdella erilaisella ei-yhteensopivalla tavalla: tämän tehtävän keskinäisinduktanssi M ja tehtävän 503. muuntosuhde n. Keskinäisinduktanssiin liittyvät muuntajayhtälöt, joiden kanssa on luontevinta soveltaa Kirchhoffin jännitelakia. I:n, E:n tai U_2:n kulmia ei tehtävässä annettu. Seuraavasta nähdään, että virran on oltava 90° jännitteitä jäljessä, koska induktanssi ja keskinäisinduktanssi ovat aina reaalilukuja (et ehkä tiennyt tätä ennestään, mutta nyt tiedät). Olkoon $E = 230\angle 0°$, jolloin $I = 73{,}21\angle -90°$ mA ja $U_2 = 12\angle 0°$.

$$\begin{cases} U_1 = E = \mathrm{j}\omega L_1 \overbrace{I_1}^{I} + \mathrm{j}\omega M \overbrace{I_2}^{0} \Rightarrow L_1 = \frac{E}{\mathrm{j}\omega I} = 10 \text{ H} \\ U_2 = \mathrm{j}\omega M \underbrace{I_1}_{I} + \mathrm{j}\omega L_2 \underbrace{I_2}_{0} \Rightarrow M = \frac{U_2}{\mathrm{j}\omega I} = 0{,}5217 \text{ H} \end{cases} \tag{102}$$

$$\Rightarrow L_2 = \frac{M^2}{L_1} = 27{,}22 \text{ mH} \tag{103}$$

$$\begin{cases} E = U_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \\ 0 = RI_2 + U_2 = \mathrm{j}\omega M I_1 + (R + \mathrm{j}\omega L_2) I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{R+\mathrm{j}\omega L_2}{-\mathrm{j}\omega M} I_2 \end{cases} \tag{104}$$

Sijoitetaan I_1 ylempään yhtälöön:

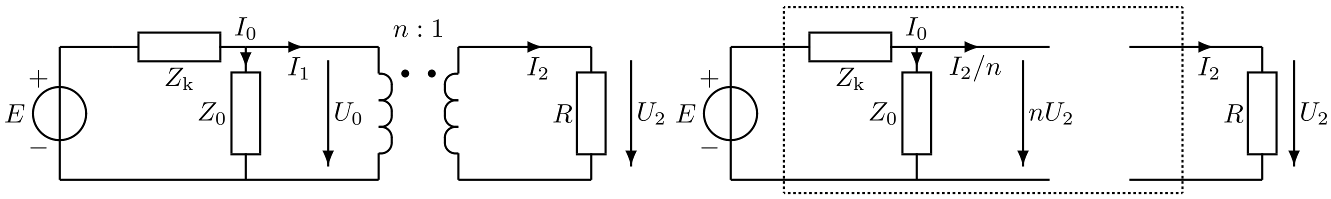
$$E = \mathrm{j}\omega L_1 \frac{R + \mathrm{j}\omega L_2}{-\mathrm{j}\omega M} I_2 + \mathrm{j}\omega M I_2 \tag{105}$$

Lopuksi ratkaistaan virta I_2 ja sen avulla I_1:

$$I_2 = \frac{-\mathrm{j}\omega M E}{\mathrm{j}\omega L_1 R + \omega^2 \underbrace{(M^2 - L_1 L_2)}_{0}} = -\frac{ME}{L_1 R} = -1{,}2\angle 0° \text{ A} \tag{106}$$

$$I_1 = \frac{R + \mathrm{j}\omega L_2}{-\mathrm{j}\omega M} I_2 = \frac{10 + \mathrm{j}8{,}55}{\mathrm{j}164} \cdot 1{,}2 = \frac{8{,}55 - \mathrm{j}10}{164} \cdot 1{,}2 = 96{,}3\angle -49{,}5° \text{ mA} \tag{107}$$

503. Muuntaja, muuntosuhde. Oheisessa muuntajassa muuntosuhde $n = \frac{4}{7}$ sekä impedanssit $Z_\mathrm{k} = (1 + \mathrm{j})\ \Omega$ ja $Z_0 = 48(1 + \mathrm{j})\ \Omega$, $R = 1\ \Omega$. Laske lähdejännite E, kun kuorman jännite $U_2 = 12$ V.



Kun muuntajaa kuvataan muuntosuhteella, ei induktansseja oteta mitenkään huomioon (kuva oikealla). Muuntosuhde tarkoittaa nimenomaan jännitteen muuntosuhdetta, virran muuntosuhde on sen käänteisluku. Tämä menetelmä on luonnostaan epätarkempi kuin fysiikan pohjamutiin pohjautuva keskinäisinduktanssi, mutta tarkkuutta voidaan parantaa ottamalla mukaan oikosulku- ja tyhjäkäynti-impedanssit (Z_k ja Z_0). Lukuarvot ovat ei-käytännönläheiset, koska tavoitteena oli "tasalukuvastaus":

$$U_0 = nU_2 \qquad I_2 = \frac{U_2}{R} \qquad I_1 = \frac{I_2}{n} \qquad I_0 = \frac{U_0}{Z_0} \tag{108}$$

$$E = Z_\mathrm{k}\left(I_0 + \frac{I_2}{n}\right) + U_0 = Z_\mathrm{k}\left(\frac{nU_2}{Z_0} + \frac{\frac{U_2}{R}}{n}\right) + nU_2 \tag{109}$$

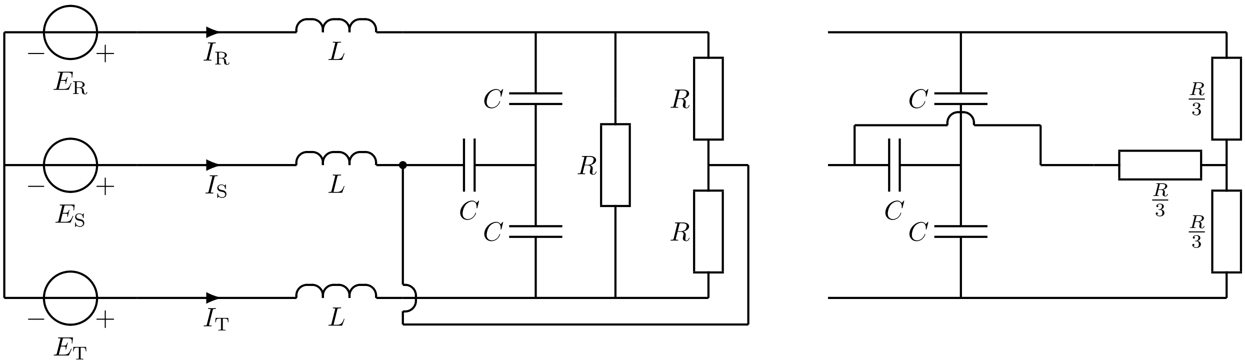
$$E = nU_2\left(\frac{Z_\mathrm{k}}{Z_0} + \frac{Z_\mathrm{k}}{n^2 R} + 1\right) = \frac{4}{7} \cdot 12 \cdot \left(\frac{(1+\mathrm{j})}{48(1+\mathrm{j})} + \frac{1+\mathrm{j}}{\frac{16}{49}} + 1\right) \tag{110}$$

$$E = \frac{48}{7}\left(\frac{1}{48} + (1+\mathrm{j})\frac{49}{16} + 1\right) = \frac{49}{7}(4 + 3\mathrm{j}) \tag{111}$$

$$E = 7 \cdot 5\angle 36{,}87° = 35\angle 36{,}87° \text{ V} \tag{112}$$

Z_k ja Z_0 ottavat huomioon mm. sen, että muuntaja ottaa ensiöpuolella virtaa silloinkin, kun toisio on avoin. Samoin ensiö- ja toisiojännitteiden välinen vaihe-ero sekä häviöt voidaan paremmin ottaa huomioon. Tätä mallia käytetään erityisesti suuritehoisten muuntajien ja eräiden moottorien yhteydessä.

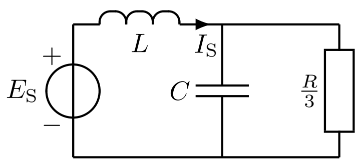
504. Symmetrinen kolmivaihejärjestelmä. Laske vaihevirta I_S yksivaiheisen sijaiskytkennän avulla. $E_\mathrm{R} = 230$ V, $R = 30\ \Omega$, $\omega C = 100$ mS, $\omega L = 10\ \Omega$.



Kolmivaihejärjestelmän komponentit ovat aina joko kolmio- tai tähtikytkennässä. Yksivaiheinen sijaiskytkentä muodostetaan tähtikytkentäisestä verkosta. Kuvassa jännitelähteet ja kondensaattorit ovat tähtikytkennässä. Tähtikytkennän tunnistaa siitä, että samaan tähtipisteeseen on liitetty kolme samanlaista komponenttia. Keloille ei tarvitse tehdä mitään, koska ne ovat sarjassa vaihejohtojen kanssa (voidaan tulkita tähtikytkennäksi). Vastukset ovat selvästi kolmiokytkennässä (joka pisteeseen liittyy kaksi samanlaista komponenttia). Vastukset voisivat muodostaa esim. sähkökiukaan. Resistansseille pitää tehdä kolmio–tähti-muunnos. Muunnos on *ekvivalentti* piirimuunnos; piirin virrat ja jännitteet **muunnosalueen ulkopuolella** eivät muutu. Myöskään kiukaan lämmitysteho ei muutu. Ylhäällä oikealla vastukset on muunnettu tähtikytkentään (Y).

$$Z_\mathrm{Y} = \frac{1}{3} Z_\Delta \Rightarrow R_\mathrm{Y} = \frac{1}{3} R_\Delta \tag{113}$$

Yksivaiheiseen sijaiskytkentään poimitaan yksi komponentti jokaisesta kolmen ryhmästä. Jännitelähde määrää sen, minkä vaiheen sijaiskytkentä muodostuu (alla S). Tähtipisteet ovat samassa potentiaalissa, joten ne voidaan yhdistää. Ylhäältä näet, että konkat eivät suinkaan pujahda sarjaan vastusten kaa.



Vastus ja konkka ovat rinnan:

$$I_\mathrm{S} = \frac{E_\mathrm{S}}{\mathrm{j}\omega L + \frac{\frac{R}{3}\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\frac{R}{3} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}} = \frac{230\angle -120^\circ}{\mathrm{j}10 + \frac{10\frac{10}{\mathrm{j}}}{10 + \frac{10}{\mathrm{j}}}} = \frac{230\angle -120^\circ}{\mathrm{j}10 + \frac{10}{\mathrm{j}+1}} = \frac{230\angle -120^\circ}{\mathrm{j}10 + 5(1-\mathrm{j})} = 32{,}5\angle -165^\circ\ \mathrm{A} \tag{114}$$

Muiden vaiheiden virrat ja jännitteet voidaan aina laskea kulmaa pyörittämällä $\pm 120^\circ$, kun yhden vaiheen tulokset on saatu selville. Kolmivaihejärjestelmän teho tarkoittaa yleensä kaikkien vaiheiden yhdessä kuskaamaa tehoa. Eri vaiheissa näennäistehot ovat teoriassa täsmälleen yhtä suuret. Sähköenergian tuotanto ja siirto perustuvat Suomessa kolmivaihejärjestelmään. Aihetta on esitelty laajemmin kirjassa.

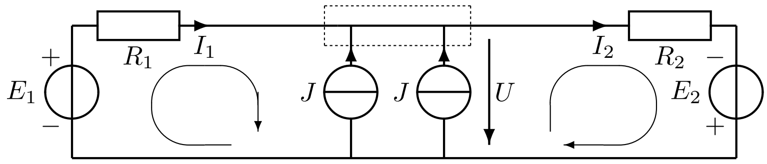
1. välikokeen alue päättyy tähän. Seuraavat kaksi "koetta" käsitellään kertausluennolla.

S-55.103 SÄHKÖTEKNIIKKA

Kimmo Silvonen

Kertausluento I. Kaksi kuvitteellista ensimmäistä välikoetta (suppea kooste vanhoista koetehtävistä). Oikeassa välikokeessa on mukana yksi laskaritehtävistä. Lisää tehtäviä on PDF-muodossa www:ssä: *www.ct.hut.fi/ courses/tentit/main.html*).

1. Laske jännite U. $J = 2$ A, $E_1 = 8$ V, $E_2 = 10$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$.

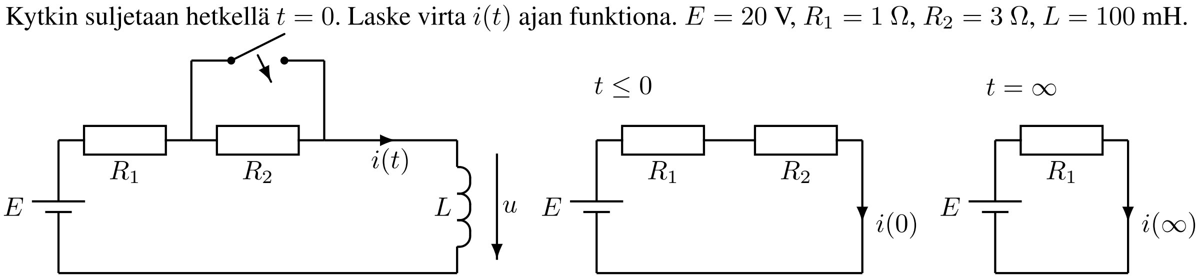


$$\begin{cases} -E_1 + R_1 I_1 + U = 0 \Rightarrow I_1 = (E_1 - U)/R_1 \\ -U + R_2 I_2 - E_2 = 0 \Rightarrow I_2 = (E_2 + U)/R_2 \end{cases} \tag{115}$$

$$I_1 + J + J = I_2 \Rightarrow \frac{E_1 - U}{R_1} + 2J = \frac{E_2 + U}{R_2} \tag{116}$$

$$\frac{8 - U}{2} + 4 = \frac{10 + U}{2} \Rightarrow 4 + 4 - 5 = \frac{U}{2} + \frac{U}{2} \Rightarrow U = 3 \text{ V} \tag{117}$$

2. Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$. Laske virta $i(t)$ ajan funktiona. $E = 20$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $L = 100$ mH.



$$I_{\mathrm{L}0} = i(0) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_{\mathrm{L}}} = 5 \qquad (R_{\mathrm{L}} = 0) \tag{118}$$

$$t > 0 : -E + R_1 i + u = 0 \Rightarrow -E + R_1 i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{119}$$

$$i = B - A\mathrm{e}^{-t/\tau} \Rightarrow -E + R_1(B - A\mathrm{e}^{-t/\tau}) + L\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = 0 \tag{120}$$

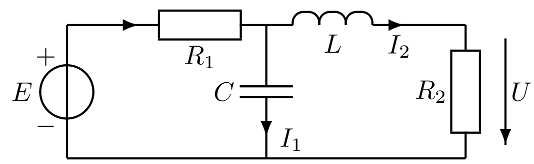
$$-E + R_1 B = 0 \ \& \ R_1(-A\mathrm{e}^{-t/\tau}) + L\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = 0 \tag{121}$$

$$B = \frac{E}{R_1} = 20 \ \& \ \tau = \frac{L}{R_1} = 0{,}1 \text{ s} \tag{122}$$

$$i(0) = B - A\mathrm{e}^{-0/\tau} \Rightarrow A = B - I_{\mathrm{L}0} = 15 \text{ A} \tag{123}$$

$$i(t) = (20 - 15\mathrm{e}^{-t/0{,}1}) \text{ A} \tag{124}$$

3. Laske jännite U. $E = 10\angle 0°$ V, $\omega = 100$ rad/s, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $L = 100$ mH, $C = 1$ mF.



$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I_1 + \mathrm{j}\omega L I_2 + R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = \mathrm{j}\omega C(\mathrm{j}\omega L + R_2) I_2 \tag{125}$$

$$-E + R_1(I_1 + I_2) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I_1 = 0 \tag{126}$$

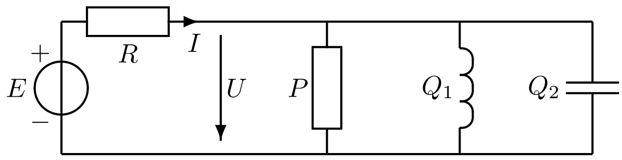
$$\Rightarrow -E + \left(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right) \underbrace{\mathrm{j}\omega C(\mathrm{j}\omega L + R_2) I_2}_{I_1} + R_1 I_2 = 0 \tag{127}$$

$$\Rightarrow -10 + (5 - \mathrm{j}10)\underbrace{\mathrm{j}0{,}1(\mathrm{j}10 + 20)}_{2\mathrm{j}-1} I_2 + 5 I_2 = 0 \tag{128}$$

$$I_2 = \frac{10}{5 + (5 - \mathrm{j}10)(2\mathrm{j} - 1)} = \frac{10}{20 + \mathrm{j}20} = \frac{1}{2 + \mathrm{j}2} \tag{129}$$

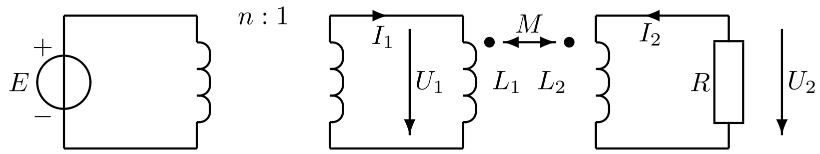
$$U = R_2 I_2 = \frac{20 \cdot 1\angle 0°}{2\sqrt{2}\angle 45°} = 7{,}07\angle -45° \text{ V} \tag{130}$$

4. Jännitelähteeseen on kytketty vastuksen R kautta kolme kuormaa. Ne ottavat jännitteellä $U = (220 + \mathrm{j}20)$ V pätö- ja loistehot $P = 90$ W, $Q_1 = 330$ VAr ja $Q_2 =?$ kuvan mukaisesti. Laske kondensaattorin ottama loisteho Q_2. $R = 20\ \Omega$, $E = (230 + \mathrm{j}0)$ V.



$$-E + RI + U = 0 \Rightarrow I = \frac{E-U}{R} = \frac{230 - 220 - \mathrm{j}20}{20} = 0{,}5 - \mathrm{j}\ \mathrm{A} \tag{131}$$
$$S = UI^* = (220 + \mathrm{j}20)(0{,}5 + \mathrm{j}) = 110 + 220\mathrm{j} + \mathrm{j}10 - 20 = 90 + \mathrm{j}230\ \mathrm{VA} \tag{132}$$
$$S = P + \mathrm{j}Q_1 + \mathrm{j}Q_2 \tag{133}$$
$$\Rightarrow 90 + \mathrm{j}230 = 90 + \mathrm{j}330 + \mathrm{j}Q_2 \tag{134}$$
$$\Rightarrow Q_2 = -100\ \mathrm{VAr} \tag{135}$$

5. Kuvassa on ideaalimuuntaja ja keskinäisinduktanssilla mallinnettu muuntaja. Laske kuorman jännite U_2. $E = 20$ V, $\omega = 10\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, $R = 50\ \Omega$, $L_1 = 2$ H, $L_2 = 8$ H, $M = 4$ H, $n = 4$.

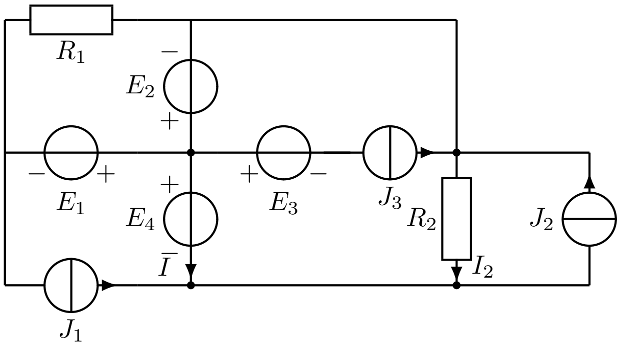


$$\begin{cases} U_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{U_1 - \mathrm{j}\omega M I_2}{\mathrm{j}\omega L_1} \\ U_2 = \mathrm{j}\omega M I_1 + \mathrm{j}\omega L_2 I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{U_2 - \mathrm{j}\omega L_2 I_2}{\mathrm{j}\omega M} \end{cases} \tag{136}$$
$$\Rightarrow \frac{U_1 - \mathrm{j}\omega M I_2}{\mathrm{j}\omega / L_1} = \frac{U_2 - \mathrm{j}\omega L_2 I_2}{\mathrm{j}\omega M} \tag{137}$$
$$U_1 = \frac{E}{n} = 5 \qquad I_2 = -\frac{U_2}{R} = -\frac{U_2}{50} \tag{138}$$
$$\frac{5 - \mathrm{j}40(-\frac{U_2}{50})}{\mathrm{j}20} = \frac{U_2 - \mathrm{j}80(-\frac{U_2}{R})}{\mathrm{j}40} \tag{139}$$
$$10 + \mathrm{j}80\,\frac{U_2}{50} = U_2 + \mathrm{j}80\,\frac{U_2}{50} \Rightarrow U_2 = \frac{10}{1 - \frac{\mathrm{j}80}{50} + \frac{\mathrm{j}80}{50}} = 10\ \mathrm{V} \tag{140}$$

Tiukan kytkennän takia myös muuntosuhteen kaava pätee: $U_2 = \frac{M}{L_1} U_1 = \frac{M}{L_1} \frac{E}{n}$.

Toinen "koe":

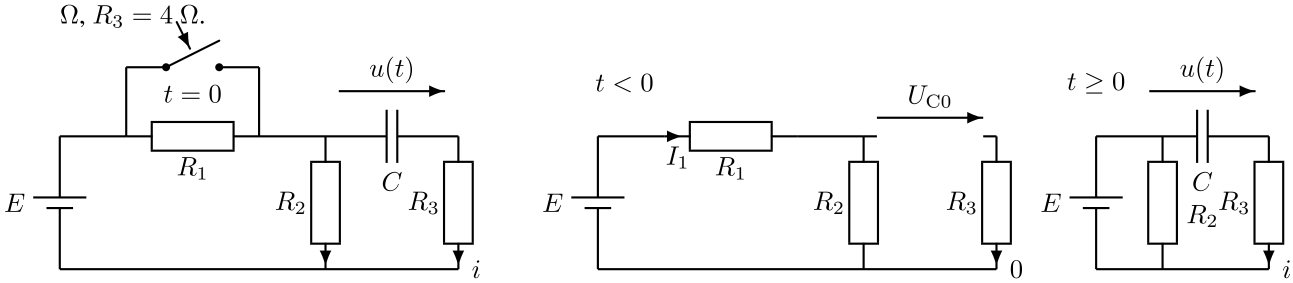
6. Laske virta I. $J_1 = 1$ A, $J_2 = 2$ A, $J_3 = 3$ A, $E_1 = 4$ V, $E_2 = 10$ V, $E_3 = 6$ V, $E_4 = 5$ V, $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$.



$$-E_4 + E_2 + R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{E_4 - E_2}{R_2} = -2{,}5 \text{ A} \tag{141}$$

$$J_1 + I + I_2 = J_2 \Rightarrow I = J_2 - J_1 - I_2 = 3{,}5 \text{ A} \tag{142}$$

7. Kun kytkin on auki, on virta $i = 0$. C on latautunut alkujännitteeseen U_{C0}. Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$. Laske U_{C0}, ja kondensaattorin jännite $u(t)$ ajan funktiona, kun $t \geq 0$. $C = 0{,}1$ F, $E = 10$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$.



$$t < 0: \quad -E + R_1 I_1 + R_2 I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2{,}5 \text{ A} \tag{143}$$

$$U_{C0} = E - R_1 I_1 - R_3 \cdot 0 = 5 \text{ V} \tag{144}$$

$$t \geq 0: \quad -E + u(t) + R_3 i = -E + \overbrace{u(t)}^{B+Ae^{-\frac{t}{\tau}}} + R_3 C \frac{\mathrm{d}\overbrace{u(t)}^{B+Ae^{-\frac{t}{\tau}}}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{145}$$

$$\tau = R_3 C = 0{,}4 \text{ s} \tag{146}$$

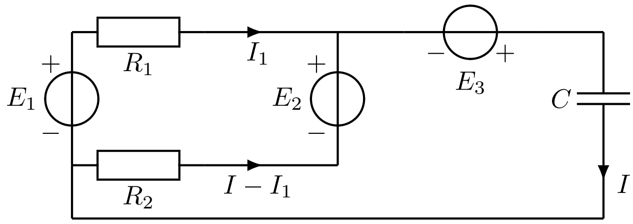
$$u(0) = B + A = U_{C0} \tag{147}$$

$$u(\infty) = B = E \Rightarrow A = U_{C0} - B = -5 \text{ V} \tag{148}$$

$$u(t) = (10 - 5\mathrm{e}^{-\frac{t}{0{,}4}}) \text{ V} \tag{149}$$

R_2:n virta ei vaikuta kondensaattorin virtaan mitään, koska E on kytketty suoraan C:n ja R_3:n sarjaankytkennän yli (kytkin kiinni). Lopputilassa i on jälleen nolla, joten konkan loppujännite tulee olemaan sama kuin E.

8. Laske virta I. $E_1 = 12$ V, $E_2 = 56\mathrm{j}$ V, $E_3 = \sqrt{2}\angle 45°$ V, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $\omega = 2\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, $C = 0{,}25$ F.



$$-E_1 + R_1 I_1 - E_3 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I = 0 \tag{150}$$

$$-E_1 + R_1 I_1 + E_2 - R_2(I - I_1) = 0 \tag{151}$$

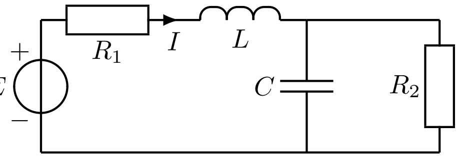
$$(R_1 + R_2) I_1 = R_2 I + E_1 - E_2 \Rightarrow I_1 = \frac{R_2 I + E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \tag{152}$$

$$-E_1 + R_1 \frac{R_2 I + E_1 - E_2}{R_1 + R_2} - E_3 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I = 0 \tag{153}$$

$$-12 + 4 \cdot \frac{12I + 12 - 56\mathrm{j}}{4 + 12} - (1 + \mathrm{j}) - \mathrm{j} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0{,}25} I = 0 \tag{154}$$

$$I = \frac{12 + 1 + \mathrm{j} - 3 + 14\mathrm{j}}{3 - 2\mathrm{j}} = \frac{10 + 15\mathrm{j}}{3 - 2\mathrm{j}} = \frac{18{,}03\angle 56{,}31^\circ}{3{,}606\angle -33{,}69^\circ} = 5\mathrm{j} = 5\angle 90^\circ \text{ A}$$

9. Millä taajuudella (ei tasavirta) jännitteen E ja virran I välinen vaihe-ero on nolla. Kyseessähän on resonanssitaajuus. $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = \frac{5}{3}\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H, $C = 0{,}1$ F.



$$Z = R_1 + \mathrm{j}\omega L + \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} R_2}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R_2} = R_1 + \mathrm{j}\omega L + \frac{R_2}{1 + \mathrm{j}\omega C R_2} \tag{155}$$

$$Z = R_1 + \mathrm{j}\omega L + \frac{R_2(1 - \mathrm{j}\omega C R_2)}{1^2 + (\omega C R_2)^2} = R + \mathrm{j}X \tag{156}$$

$$X = \omega L + \frac{R_2(-\omega C R_2)}{1^2 + (\omega C R_2)^2} = 0 \tag{157}$$

$$X = \frac{\omega L(1 + (\omega C R_2)^2) - \omega C R_2^2}{1 + (\omega C R_2)^2} = 0 \tag{158}$$

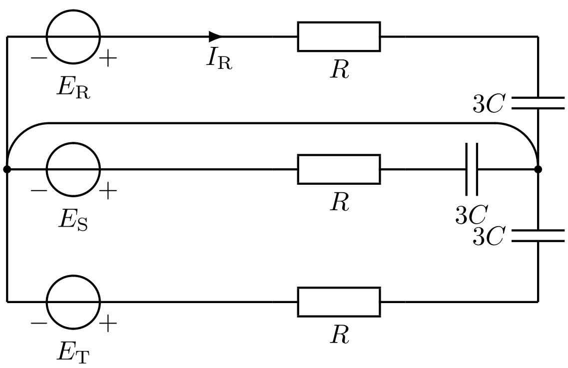
$$\omega L(1 + (\omega C R_2)^2) - \omega C R_2^2 = 0 \tag{159}$$

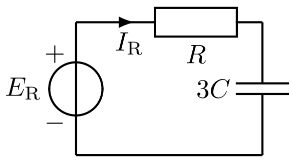
$$L(1 + (\omega C R_2)^2) - C R_2^2 = 0 \tag{160}$$

$$L(\omega C R_2)^2) = C R_2^2 - L \Rightarrow \omega^2 = \frac{C R_2^2 - L}{L C^2 R_2^2} \tag{161}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(C R_2)^2}} = \sqrt{100 - 36} = 8 \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}27 \text{ Hz} \tag{162}$$

10. Laske vaihevirta I_R yksivaiheisen sijaiskytkennän avulla. Kolmivaihejärjestelmän voi olettaa symmetriseksi. $E_\mathrm{R} = 230$ V, $R = 10\ \Omega$, $\omega C = 100$ mS.





$$I_\mathrm{R} = \frac{E_\mathrm{R}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega 3C}} = \frac{230}{10 - \mathrm{j}\frac{1}{0{,}3}} = 6{,}9(3 + \mathrm{j}) = 21{,}8\angle 18{,}4^\circ \text{ A} \tag{163}$$

Strategiani mukaisesti en käsittele enää kurssin toisella puoliskolla kompleksilukuja.

S-55.103 SÄHKÖTEKNIIKKA

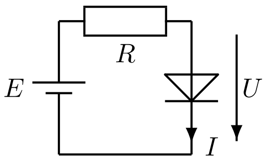
Kimmo Silvonen

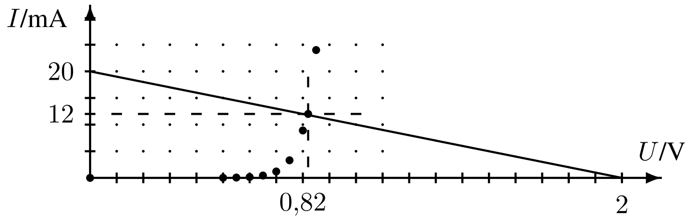
Laskuharjoitusten ratkaisut, toisen välikokeen osuus. Harjoitusviikkoihin liittyvät sivunumerot viittaavat kirjaan *Sähkötekniikka ja elektroniikka, Otatieto 602.*

Harjoitus 6, sivut 219-227, 230, 232-235, (240-242), 243-246, 249-253, (258-259).

Ideaalidiodi, puolijohdediodin ominaiskäyrä, toimintapiste, dynaaminen (vaihtovirta-) ja staattinen (tasavirta-) resistanssi, regulaattori.

603. Graafinen analyysi. Diodin ominaiskäyrä on kuvan mukainen. Määritä graafisesti diodin toimintapiste U_Q ja I_Q. $E = 2$ V, $R = 100\ \Omega$.





Puolijohdekomponenteissa (komponentti = rakenneosa) jännitteen ja virran välillä on yleensä epälineaarinen yhteys. Usein on kätevää arvioida komponentin virtaa ja jännitettä kuormitussuoran (-käyrän) avulla. Kuormituskäyrä määräytyy piirin muiden komponenttien perusteella. Se on suora, jos edes muut komponentit ovat lineaarisia. Tehtävänä on löytää yhtälöparin ratkaisu eli suoran ja käyrän leikkauspiste. Kuormitussuoran yhtälö on tässä Kirchhoffin jännitelaki:

$$-E + RI + U = 0 \Rightarrow I(U) = \frac{E - U}{R} = -\frac{1}{R}U + \frac{E}{R} \tag{164}$$

Tuloksena on siis laskevan suoran yhtälö (muotoa $y = kx + c$); piirretään kuormitussuora kahden pisteen kautta:

$$I(U = 0) = E/R = 20\ \mathrm{mA} \qquad \& \qquad I(U = E) = 0 \tag{165}$$

I	U
0	E
$\frac{E}{R}$	0

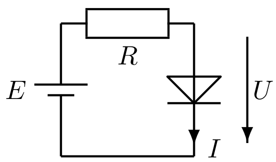
Arvioidaan käyrältä leikkauspisteen koordinaatit:

$$U_\mathrm{Q} \approx 0{,}82\ \mathrm{V}\ ,\ \ I_\mathrm{Q} \approx 12\ \mathrm{mA} \tag{166}$$

Alaindeksi Q viittaa toimintapisteeseen (quiescent) — alaindeksillä ei tässä ole ihmeempää fysikaalista merkitystä; sen voisi jättää poiskin.

601. Diodin parametrit. Diodin ominaiskäyrä on muotoa: $I = I_\mathrm{S}\left(\mathrm{e}^{\frac{U}{nU_T}} - 1\right)$, missä $U_T = 25$ mV. Oheisesta piiristä mitataan diodin jännite U kahden eri vastuksen kanssa. Kun $R_1 = 170\ \Omega$, on diodin jännite $U_1 = 0{,}7$ V, ja arvolla $R_2 = 9{,}5$ kΩ on $U_2 = 0{,}5$ V. Laske likimain parametrit I_S ja n. Lähdejännite $E = 10$ V (tasajännite).

$$I = I_\mathrm{S}\left(\mathrm{e}^{\frac{U}{nU_T}} - 1\right) \approx \begin{cases} I_\mathrm{S}\left(\mathrm{e}^{\frac{U}{nU_T}}\right) & (U >> nU_T) \\ I_\mathrm{S}\,(-1) & (U << 0) \end{cases}$$



Diodin virtayhtälö on eksponenttimuotoinen. Usein voidaan rajata tarkastelu selvästi päästösuuntaan ($U >> nU_T$) tai estosuuntaan ($U << 0$), jolloin yhtälö yksinkertaistuu. Kerroin I_S tarkoittaa diodin kyllästys- eli vuotovirtaa. Virta kyllästyy (saturation) tähän arvoon, kun jännite viedään selvästi negatiiviseksi. Kyllästysvirran lukuarvo on hyvin pieni, mutta se kasvaa nopeasti lämpötilan noustessa. Ideaalisuusvakio eli emissiokerroin n on diodeilla yleensä 2. Sille ei ole selvää fysikaalista perustelua. Lämpöjännite (terminen ekvivalentti) U_T on eräänlainen lämpötilasta riippuva luonnonvakio(kerroin) — ei varsinaisesti mikään jännite. U_T riippuu siis vain lämpötilasta, n:ää ei voi suoraan mitata. I_S voi olla niin pieni, että sen suora mittaus olisi mahdotonta. Tässä esitetään yksinkertainen menetelmä parametrien määrittämiseen. Lasketaan virrat molemmilla lukuarvoilla ja sovitetaan tulokset diodiyhtälöihin:

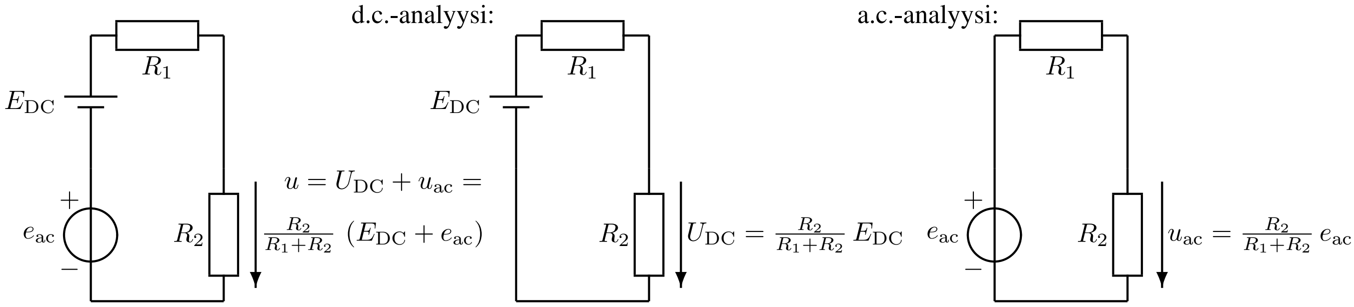
$$\begin{cases} I_1 = \frac{E-U_1}{R_1} = 54{,}7\ \text{mA} = I_\text{S}\left(\mathrm{e}^{\frac{U_1}{nU_T}} - 1\right) \approx I_\text{S}\mathrm{e}^{\frac{U_1}{nU_T}} \\ I_2 = \frac{E-U_2}{R_2} = 1{,}0\ \text{mA} \approx I_\text{S}\mathrm{e}^{\frac{U_2}{nU_T}} \end{cases} \tag{167}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{54{,}7}{1} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{U_1}{nU_T}}}{\mathrm{e}^{\frac{U_2}{nU_T}}} = \mathrm{e}^{\frac{U_1-U_2}{nU_T}} \Rightarrow \frac{U_1 - U_2}{nU_T} = \ln 54{,}7 \tag{168}$$

$$\Rightarrow n = 1{,}999 \approx 2\ ,\ I_\text{S} = \frac{I_1}{\mathrm{e}^{\frac{U_1}{nU_T}} - 1} = 45\ \text{nA} \tag{169}$$

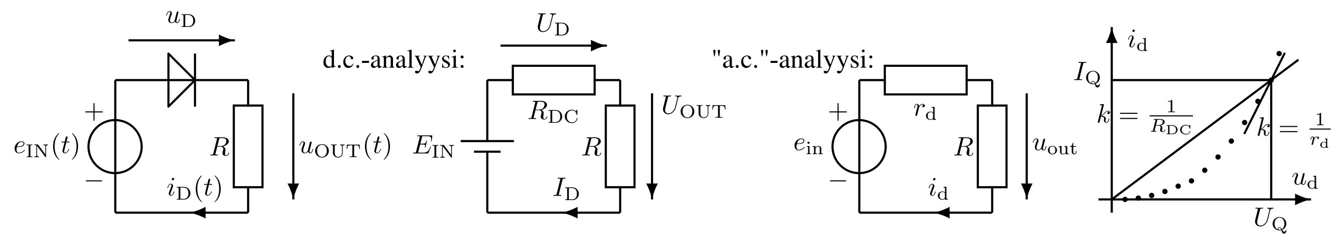
Johdanto tehtävään 602.

Seuraavassa sana *signaali* tarkoittaa virran ja jännitteen ajan funktiona muuttuvaa osaa. Elektroniikkapiirit eivät useinkaan pysty toimimaan puhtaalla signaalilla, koska ainakin signaalin negatiiviset puolijaksot menisivät laitteen toiminta-alueen ulkopuolelle. Signaali on nostettava tasajännitteen päälle, jotta toiminta sijoittuu sopivaan kohtaan ominaiskäyrää. Esimerkiksi origon lähellä ominaiskäyrä on usein liian käyrä (näin myös nauhurin äänipäissä; vrt. esimagnetointi). Kerrostamismenetelmä eli superpositioperiaate tarkoittaa sitä, että eri jännitelähteiden vaikutus piirin virtoihin ja jännitteisiin lasketaan jokainen erikseen (muut kuin tarkasteltava lähde nollataan). Lähteiden eritaajuiset signaalin osat voidaan myös kerrostaa eli superponoida. Lineaarisessa piirissä näin voidaan menetellä aina. Puolijohdekomponentit ovat epälineaarisia; tasavirran ja signaalin kerrostaminen on mahdollista vain silloin, kun signaalin amplitudi on niin pieni, että komponentin epälineaarista ominaiskäyrää voidaan approksimoida suoralla toimintapisteen läheisyydessä. Tasavirta määrää toimintapisteen. Epälineaarisuus tarkoittaa sitä, että jännite ei ole suoraan verrannollinen virtaan: komponentin resistanssi riippuu virran voimakkuudesta. Ohessa johdantona kerrostamismenetelmä täysin lineaarisessa piirissä.



Seuraavassa tehtävässä vastus R_1 (siis diodi) saa signaalianalyysissä eri arvon kuin tasavirta-analyysissä. Tähän on syynä piirin epälineaarisuus: signaali näkee diodin erilaisena kuin tasavirta.

602. Tasavirta- ja piensignaalianalyysi. Piirissä on lähdejännite, jossa pieni sinisignaali ratsastaa suuremman tasajännitteen päällä: $e_\text{IN}(t) = E_\text{IN} + e_\text{in}(t) = (4 + 0{,}067 \sin \omega t)$ V. Laske diodin toimintapisteen virta $I_\text{Q} = I_\text{D}$ sekä tasavirtaresistanssi R_DC, kun $U_\text{Q} = U_\text{D} \approx 0{,}7$ V. Laske vielä dynaamisen resistanssin r_d avulla vastuksen jännite $u_\text{OUT}(t)$. Aaltomuodon vähäistä muuttumista ei oteta huomioon. $R = 5600\ \Omega$, $I_\text{S} = 0{,}49$ nA, $nU_T = 50$ mV.



Huom! Piensignaalianalyysiin liittyvät tehtävät ovat *"case-sensitiivisiä"*. Yllä merkintä E_IN tarkoittaa tasajännitettä, e_in tasajännitteeseen summautunutta ajan funktiona vaihtelevaa signaalia. Tällöin kokonaisjännite muodostuu edellisten summana $e_\text{IN} = E_\text{IN} + e_\text{in}$. Samaa kansainvälisesti sovittua merkintätapaa sovelletaan johdonmukaisesti ainakin 6. ja 7. laskuharjoituksessa. Muissa harjoituksissa asiaan ei tarvitse kiinnittää niin paljon huomiota.

Koska diodin parametrit tunnetaan, olisi toimintapisteen jännite (ja siten myös virta) voitu laskea iteroimalla. Tässä lukuarvot on mitoitettu niin, että iterointitulos on (lähes) tasan 0,7 V (kokeile vaikka). Diodin tasavirtaresistanssi R_DC riippuu jännitteen ja virran voimakkuudesta:

$$U_\text{OUT} = 4 - U_\text{Q} = 3{,}3\ \text{V}\ ,\ I_\text{Q} = I_\text{D} = \frac{U_\text{OUT}}{R} = 0{,}5893\ \text{mA} \tag{170}$$

$$\left(U_{\text{OUT}} = \frac{R}{R + R_{\text{DC}}} \cdot 4\right) \ , \ R_{\text{DC}} = \frac{U_{\text{D}}}{I_{\text{D}}} = 1188\ \Omega \tag{171}$$

Diodin ominaiskäyrä on epälineaarinen; siis aaltomuoto vääristyy. Piensignaalianalyysissä oletetaan ac-signaali pieneksi tasajännitteeseen verrattuna: $e_{\text{in}} << E_{\text{IN}}$, koska $0{,}067 << 4$. Tällöin diodin ominaiskäyrää voidaan approksimoida suoralla (vastus r_{d}) toimintapisteen lähellä. Kyseessä on oikeastaan kerrostamismenetelmä; lasketaan eri lähteiden vaikutukset erikseen.

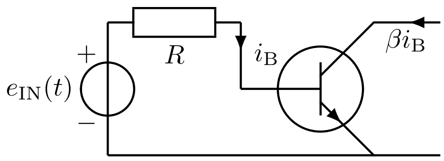
$$r_{\text{ac}} = r_{\text{d}} = \frac{\Delta U_{\text{D}}}{\Delta I_{\text{D}}} = \frac{1}{g_{\text{d}}} = \frac{1}{k} = \left.\frac{1}{\frac{\partial i}{\partial u}}\right|_{i=I_{\text{Q}}\ ,\ u=U_{\text{Q}}} \ , \ i = I_{\text{S}}(\mathrm{e}^{\frac{u}{nU_T}} - 1) \tag{172}$$

$$r_{\text{d}} = \left.\frac{1}{\frac{I_{\text{S}}}{nU_T}\mathrm{e}^{\frac{u}{nU_T}}}\right|_{I_{\text{Q}}\ ,\ U_{\text{Q}}} = \frac{nU_T}{I_{\text{Q}} + I_{\text{S}}} \approx \frac{nU_T}{I_{\text{Q}}} = 84{,}8\ \Omega \tag{173}$$

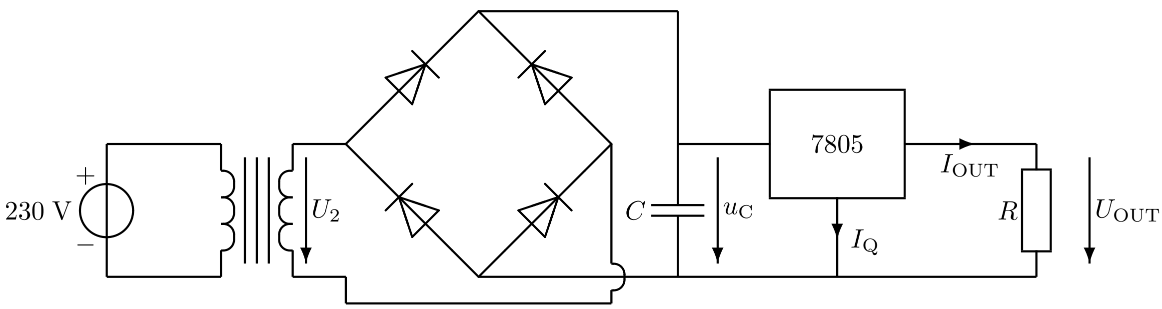
$$u_{\text{out}} = \frac{R}{R + r_{\text{d}}} \cdot 0{,}067 \sin \omega t \tag{174}$$

$$u_{\text{OUT}}(t) = U_{\text{DC}} + u_{\text{ac}} = U_{\text{OUT}} + u_{\text{out}} = (3{,}3 + 0{,}066 \sin \omega t)\ \text{V} \tag{175}$$

Tarkempi tulos on $u_{\text{OUT}} = 3{,}3 + 0{,}066000 \sin \omega t - 0{,}000004296 \cos 2\omega t \ldots$. Viimeinen termi edustaa harmonista säröä; sen laskentaa on havainnollistettu kirjassa. Menetelmä toimii vielä hyvin, vaikka sinin huippuarvo olisi niinkin korkea kuin 1 V — piensignaaliehto $e_{\text{in}} << E_{\text{IN}}$ ei siis ole kovin rajoittava. Nyt joudun tuottamaan karvaan pettymyksen monille hifisteille: kaikkien transistori-, fet- ja putkivahvistimien toiminta perustuu vastaavanlaiseen piensignaalimalliin, missä alunperin käyrää ominaiskäyrää approksimoidaan suoralla. Yllä oleva vastus r_{d} voisi yhtä hyvin olla signaalin näkemä resistanssi transistorin kannan ja emitterin välillä (r_π).



642. Tasasuuntaus, regulointi. Verkkomuuntajan ($f = 50$ Hz) toisiojännite on $U_2 = 8$ V. Laske kondensaattorin maksimijännite, jos yhden diodin jännitehäviöksi oletetaan $U_{\text{D}} = 0{,}7$ V. Kuinka suurta on likimain jännitteen aaltoilu, jos $R = 10\ \Omega$ ja $I_{\text{Q}} = 0$? Mikä on regulaattorimikropiirin tehohäviö? $C = 4700\ \mu$F.



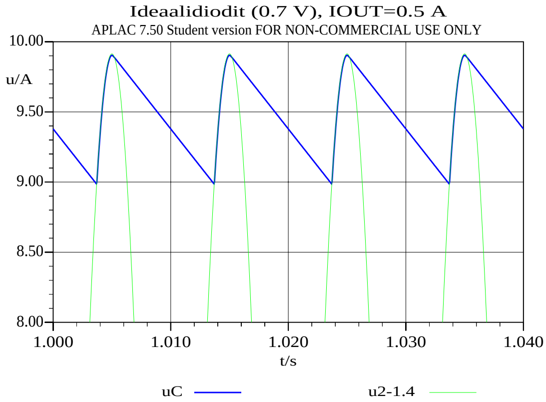
$$\hat{u}_{\text{C}} \approx \sqrt{2} \cdot U_2 - 2U_{\text{D}} = 9{,}9\ \text{V} \tag{176}$$

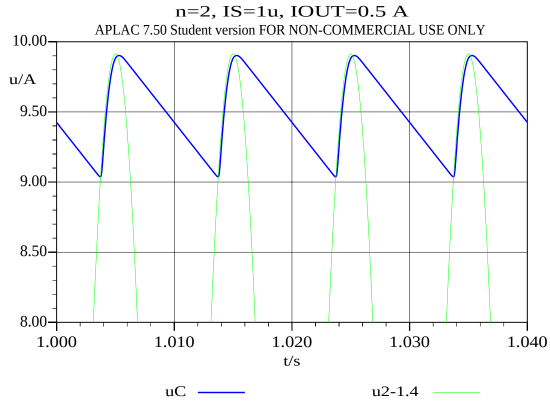
$$I_{\text{OUT}} = \frac{U_{\text{OUT}}}{R} = \frac{5}{10} = 0{,}5\ \text{A} \tag{177}$$

$$P_{\text{REG}} \approx (\hat{u}_{\text{C}} - U_{\text{OUT}})I_{\text{OUT}} = 2{,}45\ \text{W} \tag{178}$$

$$\Delta U = \frac{I_{\text{OUT}}\Delta t}{C} \approx \frac{I_{\text{OUT}}\frac{T}{2}}{C} = \frac{I_{\text{OUT}}}{2fC} = 1{,}06\ \text{V} \tag{179}$$

Alla simulointituloksia. Huomataan, että yllä oleva kaava liioittelee ΔU:n arvoa, koska todellisuudessa laskukausi $\Delta t < T/2$.

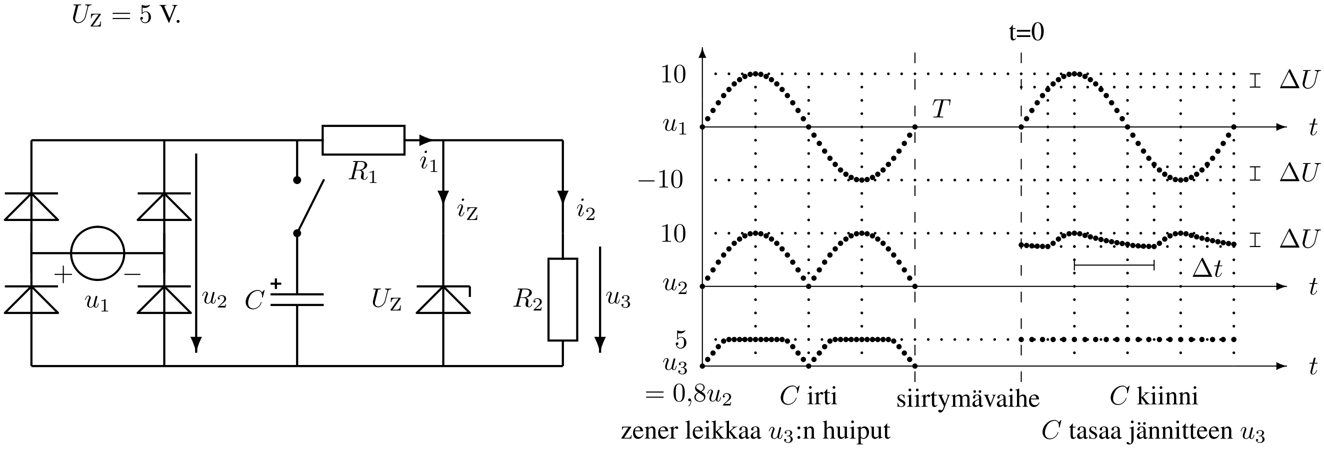




Regulaattorimikropiirin ytimen ja kotelon välinen lämpöresistanssi on tyypillisesti $R_{\mathrm{JC}} \approx 3$ °C/W. Tällä teholla piirin ydin on siis lähes 7,5 astetta kuumempi kuin piirin kotelon pintalämpötila T_{C}. Piireille ilmoitetaan nimenomaan maksimi liitoslämpötila T_{J}. Tämä yhdessä ympäristölämpötilan T_{A} kanssa määrää jäähdytysrivan suurimman sallitun lämpövastuksen. Ilman jäähdytysripaa piirin sisäinen (liitos)lämpötila olisi noin $T_{\mathrm{J}} \approx T_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{JA}} P_{\mathrm{REG}}$, missä R_{JA} on noin 50 astetta/watti (TO-220-kotelossa).

Tehtävä 604. on jätetty pois laskuharjoituksista.

604. Tasasuuntaus. Piirrä jännitteen aaltomuodot $u_1(t)$, $u_2(t)$ ja $u_3(t)$. Millaisiksi käyrät muuttuvat, kun piiriin on liitetty suuri kondensaattori (kytkentäilmiötä ei oteta huomioon)? Laske zenerdiodin suurin tehohäviö. Diodit oletetaan ideaalisiksi. Laske u_3 ensin ilman zeneriä. $u_1(t) = 10\sin(\omega t)$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 80\ \Omega$, $C = 1000\ \mu$F, $U_{\mathrm{Z}} = 5$ V.



Tehtävän sujuva ratkaisu edellyttää, että opiskelija tunnistaa kytkennästä seuraavat standardipiirirakenteet: kokoaaltotasasuuntaussilta, suodatuskondensaattori C (huipputasasuuntaaja), zener-vakavointi (R_1 ja zenerdidi) sekä kuorma R_2. Käyrä $u_1(t)$ annettiin tehtävässä, $u_2(t)$ on järkevää ottaa valmiina (ennestään tuttuna?, kirja!) tuloksena. Käyrä $u_3(t)$ perustuu zenerdiodin toimintaan (giljotiini).

Ilman kondensaattoria $u_2 = |u_1|$. Kun C on mukana, se varautuu ennen jokaista huippua u_2:n huippuarvoon $\hat{u}_2 = \hat{u}_1 = 10$ V, mutta purkautuu huippujen välillä. Latauskäyrä on sinimuotoinen ja purkauskäyrä eksponentiaalinen (jos virta i_1 olisi vakio, kuten regulaattorimikropiirin yhteydessä, olisi u_2:n purkauskäyrä laskeva suora).

Ilman zenerdiodia u_3 määräytyisi jännitteenjakajasta:

$$u_3 = \frac{R_2 u_2}{R_1 + R_2} = 0{,}8 u_2 \qquad \& \qquad u_3 \le U_{\mathrm{Z}} \tag{180}$$

Zener rajoittaa jännitteen u_3 alle 5 volttiin ja leikkaa u_2:ssa näkyvän rippelin pois, mikäli u_3:n minimiarvo ilman zeneriä on yli 5 volttia (tämän tarkistaminen ei kuulu kurssiin). Zenerin tehohäviö on suurimmillaan silloin, kun sen virta on suurimmillaan. Zenervirta i_{Z} ja u_2 saavuttavat maksimiarvonsa samalla hetkellä.

$$i_{1\mathrm{MAX}} = (\hat{u}_2 - U_{\mathrm{Z}})/R_1 = 0{,}25\ \mathrm{A}\ ,\ i_{2\mathrm{MAX}} = U_{\mathrm{Z}}/R_2 = 0{,}0625\ \mathrm{A} \tag{181}$$

$$P_{\mathrm{MAX}} = U_{\mathrm{Z}} i_{\mathrm{ZMAX}} = U_{\mathrm{Z}}(i_{1\mathrm{MAX}} - i_{2\mathrm{MAX}}) = 0{,}9375\ \mathrm{W} \tag{182}$$

Jos kuorma R_2 irrotetaan piiristä, joutuu zenerdiodi nielemään myös kuormavirran. Tällöin sen tehohäviö nousee 1,25 wattiin. Tarkistetaan vielä, pysyykö jännite zenerdiodin kohdalla yli viiden voltin U_{Z}, kuten oikea toiminta edellyttää (tarkistus ei kuulu kurssiin). Oletetaan aluksi, että C purkautuu suoraviivaisesti sillä kulmakertoimella, mikä on voimassa käyrän huippukohdassa (myöhemminhän purkautuminen todellisuudessa loivenee). Purkausajaksi otetaan likiarvona puolijaksoa, vaikka todellisuudessa tämä purkausaika on hieman lyhyempi:

$$\text{Kun } C \text{ purkautuu} : i_1 = i_\mathrm{C} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \approx C\frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$$\Delta U < \frac{\Delta t}{C} I_1 < 2{,}5 \text{ V} \;,\; (\Delta t < \frac{T}{2} = 10 \text{ ms}) \Rightarrow \underbrace{\frac{R_2(\hat{u}_2 - \Delta U)}{R_1 + R_2}}_{>6 \text{ V}} > U_\mathrm{Z} \tag{183}$$

Likiarvolaskelman mukaan u_2:n rippeli jää varmasti alle 2,5 voltin. Koska epäyhtälö on voimassa, on zenerdiodilla riittävät toimintaedellytykset. Tarkemmin tämä nähdään oikeiden lausekkeiden avulla:

$$u_2(\Delta t + T/4) = U_\mathrm{Z} + (\hat{u}_2 - U_\mathrm{Z})\mathrm{e}^{-\frac{\Delta t}{R_1 C}} = |\hat{u}_2 \sin[\omega(\Delta t + T/4)]| \tag{184}$$

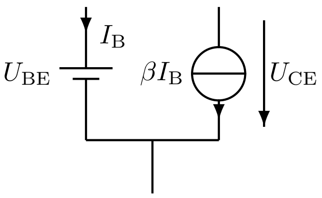
$$\Rightarrow \Delta t \approx 8{,}133 \text{ ms} \;,\; u_2(\Delta t + T/4) = 8{,}33 \text{ V} = \hat{u}_2 - \Delta U \Rightarrow \Delta U \approx 1{,}67 \text{ V} \tag{185}$$

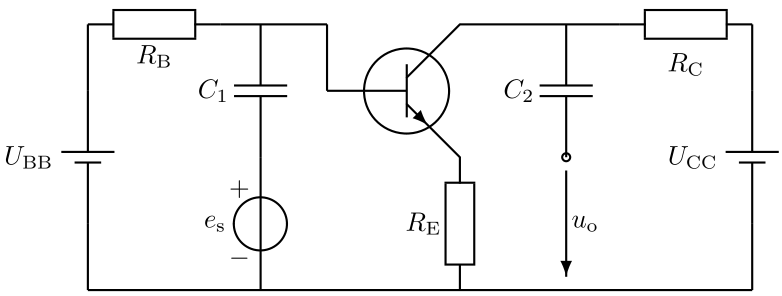
Rippeli on siis 1,67 V — ei lähelläkään 2,5 volttia, jonka toki tiedettiinkin olevan pessimistinen arvio. Käytännössä R_1 ja zenerdiodi kannattaa korvata regulaattorimikropiirillä. R_2 kuvaa kuormittavaa laitetta (esimerkisi radio).

Harjoitus 7, sivut 275-288, (289-290), 290-293, 295-297, (298-306), (41-45 on hyödyllinen).

Transistorin toimintapiste, tasavirta- ja piensignaalisijaiskytkentä, ja -analyysi, transistori kytkimenä ja ominaiskäyrän epälineaarisella osalla, kyllästyminen (joo, ainakin transistorin!).

742. Toimintapiste (lin.). Laske oheisen transistorivahvistimen toimintapiste (I_B, I_C ja U_CE) olettaen, että $U_\mathrm{BE} = 0{,}7$ V ja $\beta = 99$. $R_\mathrm{B} = 100$ kΩ, $R_\mathrm{C} = 3$ kΩ, $R_\mathrm{E} = 1$ kΩ, $U_\mathrm{BB} = 2{,}7$ V, $U_\mathrm{CC} = 9$ V.





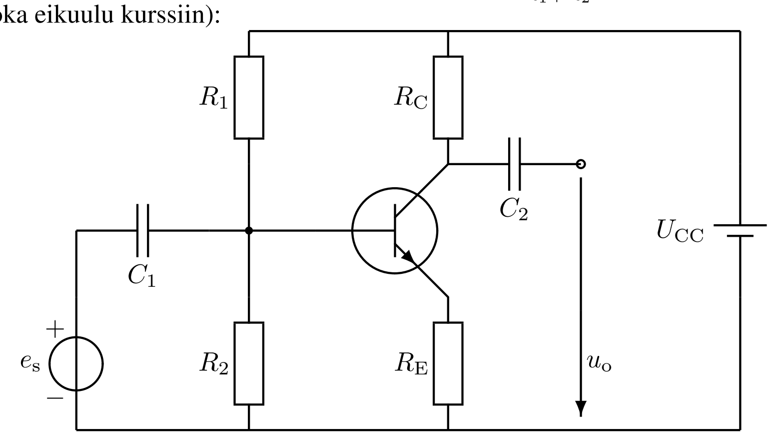
$$-U_\mathrm{BB} + R_\mathrm{B} I_\mathrm{B} + U_\mathrm{BE} + R_\mathrm{E}(\beta + 1) I_\mathrm{B} = 0 \Rightarrow I_\mathrm{B} = \frac{U_\mathrm{BB} - U_\mathrm{BE}}{R_\mathrm{B} + R_\mathrm{E}(\beta + 1)} = 10 \;\mu\text{A} \tag{186}$$

$$I_\mathrm{C} = \beta I_\mathrm{B} = 990 \;\mu\text{A} \tag{187}$$

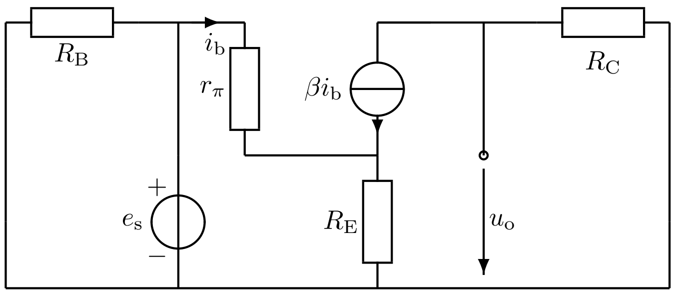
$$-U_\mathrm{CC} + R_\mathrm{C}\beta I_\mathrm{B} + U_\mathrm{CE} + R_\mathrm{E}(\beta + 1) I_\mathrm{B} = 0 \Rightarrow \tag{188}$$

$$U_\mathrm{CE} = U_\mathrm{CC} - R_\mathrm{C} I_\mathrm{C} - R_\mathrm{E}(\beta + 1) I_\mathrm{B} = 5{,}03 \text{ V} \tag{189}$$

Sama piiri toisin piirrettynä. Kun $R_1 = 333$ kΩ ja $R_2 = 143$ kΩ, on $U_\mathrm{BB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_\mathrm{CC}$ ja $R_\mathrm{B} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (kyseessä on Théveninin lähde, joka eikuulu kurssiin):



743. Piensignaalianalyysi (lin.). Laske edellisen tehtävän vahvistimen jännitevahvistus signaalitaajuudella. Transistorille käytetään kuvan sijaiskytkentää. Kondensaattorit ja tasajännitelähteet oletetaan oikosuluiksi. e_s toimii signaalilähteenä ja u_o lähtöjännitteenä. Pienet kirjaimet ja pienet alaindeksit korostavat sitä, että tasavirtakomponenttia ei oteta laskuihin mukaan. $U_T = 25$ mV, $n = 1$.



$$r_\pi = \frac{nU_T}{I_B} = 2{,}5\ \text{k}\Omega \tag{190}$$

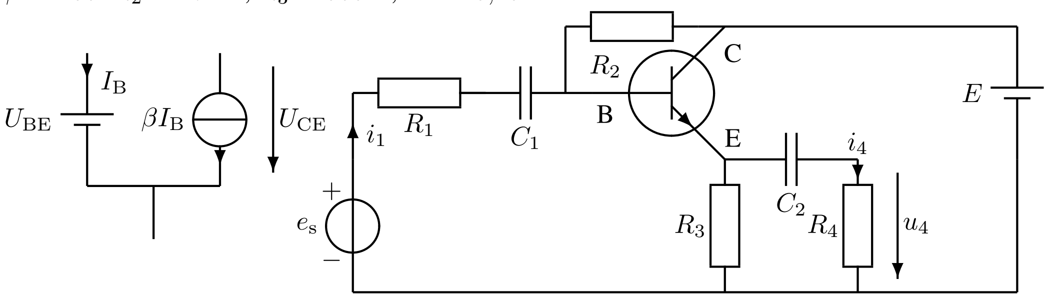
$$-e_s + r_\pi i_b + R_E(\beta+1)i_b = 0 \Rightarrow i_b = \frac{e_s}{r_\pi + R_E(\beta+1)} \tag{191}$$

$$-u_o - R_C\beta i_b = 0 \Rightarrow u_o = -R_C\beta i_b = -R_C\beta\frac{e_s}{r_\pi + R_E(\beta+1)} \tag{192}$$

$$\frac{u_o}{e_s} = -\frac{\beta R_C}{r_\pi + R_E(\beta+1)} = -2{,}9 \tag{193}$$

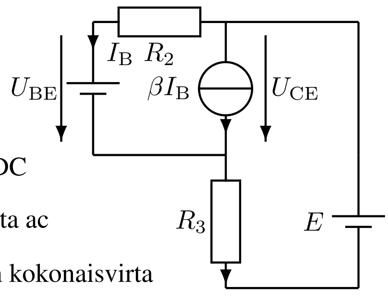
Tehtävät 701 ja 702 on korvattu edellisillä kahdella tehtävällä.

701. Toimintapiste. Laske oheisen transistorivahvistimen toimintapiste (I_B, I_C ja U_{CE}) olettaen, että $U_{BE} = 0{,}7$ V ja $\beta = 100$. $R_2 = 47$ kΩ, $R_3 = 500$ Ω, $E = 10{,}45$ V.



Tehtävissä 701 ja 702 on voimassa sama *"case-sensitiivisyys"*, joka määriteltiin tehtävässä 602. Transistori on npn-tyyppiä; johtimien alaindeksit B = *base* (kanta), C = *collector*, E = *emitter*. Oleellisin osa transistorin toimintaa on virtavahvistus. Suurempaa kollektorivirtaa ohjaillaan paljon pienemmällä kantavirralla. Kerroin β on vakio erittäin laajalla virta-alueella, mutta vaihtelee käytännössä voimakkaasti lämpötilan funktiona. Jännite U_{BE} on pn-liitoksen jännite. Sen tarkkaa arvoa on mahdotonta laskea, ellei transitorin parametreja tunneta tarkasti. Käytännössä likiarvo 0,7 V on yleensä riittävän tarkka. Voit itse todeta, että tulokset eivät muutu paljoa, vaikka muuttaisit jännitettä 0,1 volttia suuntaan tai toiseen.

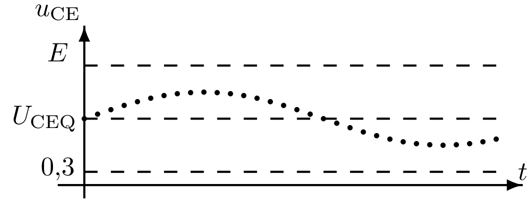
C_1 ja C_2 erottavat signaalilähteen ja kuorman tasavirtapiiristä. Koska toimintapiste tarkoittaa tasajännitettä ja tasavirtaa, jää analysoitavaksi piiriksi alla oleva kuva. Transistorin paikalle on sijoitettu sen tasavirtasijaiskytkentä. Kuten alla olevasta käyrästä havaitaan, voi jännite u_{CE} vaihdella lineaarisessa toiminnassa signaalin funktiona noin 0,3 voltin ja käyttöjännitteen E välillä. Toimintapisteen $U_{CE} = U_{CEQ}$ olisi edullista sijaita tämän alueen keskivaiheilla, muuten sen paikka ei ole kriittinen. Nyt ymmärrät myös, mista tulee alaindeksi Q = quiescent: toimintapisteessä signaali on levossa.



I_B = kannan tasavirta DC

i_b = kannan signaalivirta ac

$i_B = I_B + i_b$ = kannan kokonaisvirta



Virrat ja jännitteet on helppo laskea Kirchhoffin lakien pohjalta. Tuntematonta jännitettä U_{CB} ei kannata ottaa yhtälöihin mukaan, koska sitä ei yleensä kysytä. Tässä tehtävässä kyseinen jännite tulee tietysti mukaan vastuksen R_2 jännitteenä. Kierretään piiri reunoja pitkin ympäri:

$$-R_3(\beta+1)I_B - U_{BE} - R_2 I_B + E = 0 \tag{194}$$

$$I_{\mathrm{B}} = \frac{E - U_{\mathrm{BE}}}{R_2 + R_3(\beta + 1)} = 100\ \mu\mathrm{A} \Rightarrow I_{\mathrm{C}} = \beta I_{\mathrm{B}} = 10\ \mathrm{mA} \tag{195}$$

Jännitteen U_{CE} laskemiseksi se on vielä otettava yhtälöihin mukaan:

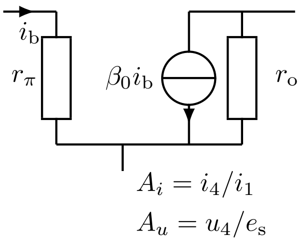
$$-R_3(\beta + 1)I_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{CE}} + E = 0 \Rightarrow U_{\mathrm{CE}} = E - R_3(\beta + 1)I_{\mathrm{B}} = 5{,}4\ \mathrm{V} \tag{196}$$

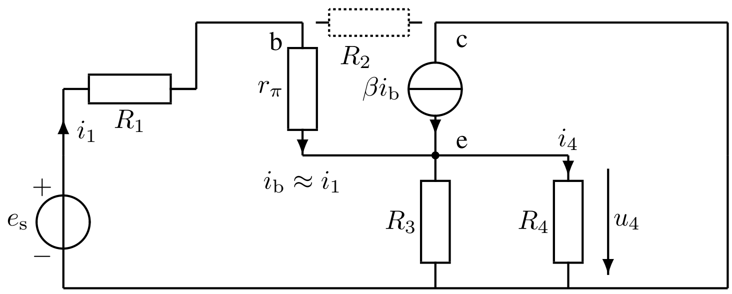
Signaali mahtuu heilumaan käytännön äärirajojen, E ja noin 0,3 V, välissä, koska toimintapiste sijaitsee näiden keskivaiheilla.

Seuraava tehtävä käsittelee samaa vahvistinta signaalin kannalta.

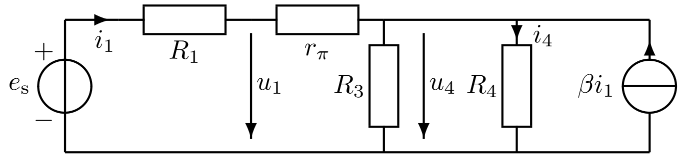
702. Piensignaalianalyysi. Laske edellisen tehtävän vahvistimen virta- ja jännitevahvistukset signaalitaajuudella. Transistorille käytetään kuvan sijaiskytkentää. Kondensaattorit ja tasajännitelähde oletetaan oikosuluiksi ($|\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}| << R_1, R_4$). R_2 ja r_{o} voidaan olettaa äärettömiksi ($R_2 >> R_1$, $R_4 << r_{\mathrm{o}}$). e_{s} toimii signaalilähteenä ja R_4 kuormana. Pienet kirjaimet ja pienet alaindeksit korostavat sitä, että tasavirtakomponenttia ei oteta laskuihin mukaan. $R_1 = 600\ \Omega$, $R_4 = 131{,}25\ \Omega$, $C_1 = C_2 = 100\ \mu$F, $r_\pi = 500\Omega$, $\beta_0 \approx \beta = 100$, $\omega = 10\,000$ 1/s.

Alla vasemmalla transistorin sijaiskytkentä signaalin näkemänä, oikealla koko piiri signaalin näkemänä. Edellä tulikin jo lueteltua, mitä toimenpiteitä piensignaalianalyysiin kuuluu. R_2:n pois jättämiseen ei ole kovin vankkoja fysikaalisia perusteita (toiseen tulokseen tulee virhettä melkoisesti) — elektroniikassa kuitenkin melko radikaalitkin approksimaatiot ovat tavallisia, koska komponenttien parametriarvoja ei niiden suuren vaihtelun takia kuitenkaan tunneta kovin tarkasti.





Piirretään kytkentä ilman R_2:sta hieman selkeytettynä. Signaalilähteenä voisi olla vaikkapa CD-soitin (R_1 voisi olla sen sisäinen vastus). Kuormavastus R_4 voisi esittää kuuloketta.



Tasavirtavahvistus β ja signaalivirtavahvistus β_0 määritellään eri tavalla, mutta käytännössä ne ovat yhtä suuret:

$$\beta = \frac{I_{\mathrm{C}}}{I_{\mathrm{B}}}\ ,\ \beta_0 = \frac{\Delta i_{\mathrm{C}}}{\Delta i_{\mathrm{B}}} = \frac{i_{\mathrm{c}}}{i_{\mathrm{b}}} \approx \beta \tag{197}$$

Kirchhoffin virta laki yläsolmulle:

$$\beta i_1 + i_1 = \frac{u_4}{R_3} + \frac{u_4}{R_4} = \overbrace{u_4}^{R_4 i_4}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \Rightarrow A_i = \frac{i_4}{i_1} = \frac{(\beta+1)R_3}{R_3 + R_4} = 80 \tag{198}$$

Kirchhoffin jännitelaki vasempaan ikkunaan:

$$i_1 = \frac{e_{\mathrm{s}} - u_4}{R_1 + r_\pi} \tag{199}$$

$$(\beta + 1)\underbrace{i_1}_{\frac{e_{\mathrm{s}} - u_4}{R_1 + r_\pi}} = u_4\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \tag{200}$$

$$A_u = \frac{u_4}{e_{\mathrm{s}}} = \frac{1}{1 + \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4}\frac{R_1 + r_\pi}{\beta + 1}} = 0{,}905 \tag{201}$$

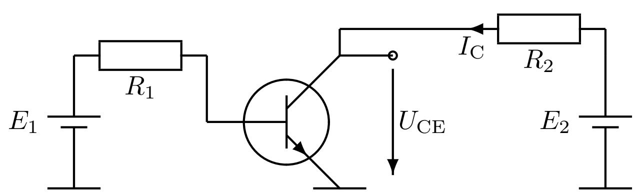
Yllä laskettiin jännitevahvistus signaalilähteen suhteen. Jos R_1 on signaalilähteen sisäinen vastus, on jännitevahvistus tulojännitteen suhteen $\frac{u_4}{u_1}$. Piiri on käytännössä resistiivinen, koska konkat ovat niin suuret ja trankun kapasitansseja ei oteta huomioon.

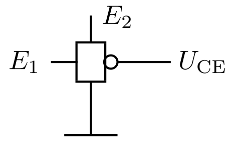
Tarkka vastaus R_2:n kanssa on hieman työläämpi laskea (siksi jätinkin R_2:n pois). Ohessa vain tulokset:

$$A_u = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(R_2||R_1)+r_\pi}{(R_3||R_4)(\beta+1)}} = 0{,}894 \qquad A_i = \frac{(\beta+1)R_3}{R_3+R_4}\cdot\frac{R_2}{R_2+(\beta+1)R_3+r_\pi} = 38{,}4$$

Virtavahvistus on todellisuudessa näköjään paljon pienempi kuin laskemamme likiarvo ($R_2 \approx \infty$), mutta jännitevahvistus on lähes sama.

703. Transistori kytkimenä (logiikkapiiri). Oheista transistoria käytetään logiikkapiirissä invertterinä. Virtavahvistus β voi vaihdella välillä 40…200. Mitoita R_2 ja E_2, kun halutaan, että loogisessa 1-tilassa $U_{\mathrm{CE}} \approx 5$ V ja 0-tilassa $U_{\mathrm{CE}} \leq 0{,}3$ V. $E_1 = 0$ V tai $E_1 = 5$ V, $U_{\mathrm{BE}} \approx 0{,}7$ V, $R_1 = 100$ kΩ.





TTL-logiikkapiireissä transistorit ovat vuoroin kyllästys-, vuoroin sulkutilassa. Niin tässäkin tehtävässä. Sulkutilassa U_{BE} on niin pieni, ettei kannalle kulje virtaa, joten myös $I_{\mathrm{C}} = 0$. Kyllästystilassa jännite U_{CE} menee niin pieneksi kuin se kyseisellä virranvoimakkuudella on mahdollista. käytännössä alaraja on 0,3 voltin alapuolella (epälineaarisen toiminnan raja).

$$-E_1 + R_1 I_{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{BE}} = 0 \Rightarrow I_{\mathrm{B}} = \frac{E_1 - U_{\mathrm{BE}}}{R_1}\ , \quad \text{kun } E_1 \geq 0{,}7 \text{ V} \tag{202}$$

$$-U_{\mathrm{CE}} - R_2 I_{\mathrm{C}} + E_2 = 0 \Rightarrow U_{\mathrm{CE}} = E_2 - R_2 I_{\mathrm{C}} = E_2 - R_2\beta I_{\mathrm{B}} \leq 0{,}3 \text{ V} \tag{203}$$

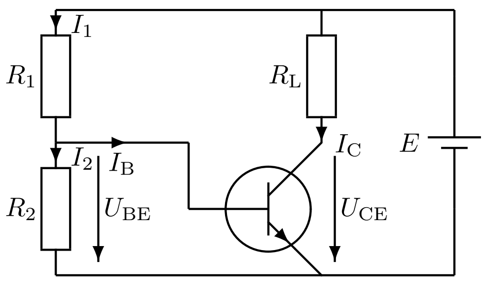
$$U_{\mathrm{CE}} \leq 0{,}3 \text{ V} \Rightarrow R_2\beta \geq \frac{E_2 - 0{,}3 \text{ V}}{I_{\mathrm{B}}} \qquad \Leftarrow \qquad \beta \geq 40 \tag{204}$$

$$\Rightarrow R_2 \geq \frac{4{,}7}{40\cdot 0{,}043} = 2{,}7 \text{ k}\Omega \tag{205}$$

Epäyhtälö toteutuu myös, jos $\beta > 40$. Taulukossa yhteenveto tuloksista. Invertteri muuttaa loogisen nollatilan ($E_1 = 0$ V) loogiseksi ykköstilaksi ($U_2 = 5$ V) ja päinvastoin. Toisinpäin tämä piiri ei voisi toimia. Loogiset portit ovat käytännössä mikropiirejä. Itse kyhätty logiikka tulee kysymykseen lähinnä silloin, kun tarvitaan normaalia suurempia virtoja tai jännitteitä.

E_1	U_{BE}	I_{B}	I_{C}	U_{CE}
0	0	0	0	$E_2 \Rightarrow E_2 = 5$
5	0,7	$0{,}043\cdot 10^{-3}$	βI_{B}	$\leq 0{,}3$

704. Transistorin kyllästyminen. Mitä arvoja saa virta I_{C}, kun kuormavastus R_{L} vaihtelee välillä $0\ldots 200$ Ω. Oleta, että U_{CE} kyllästyy kuvan mukaisesti arvoon 0,3 V. $R_1 = 4{,}65$ kΩ, $R_2 = 700$ Ω, $\beta = 100$, $U_{\mathrm{BE}} = 0{,}7$ V, $E = 10$ V.



Transistorin virtavahvistus β pienenee, kun transistori joutuu epälineaariselle toiminta-alueelleen ($U_{\mathrm{CE}} \leq 0{,}3$ V). Virtavahvistuskerrointa β saa siis käyttää vain silloin, kun $U_{\mathrm{CE}} \geq 0{,}3$ V. Kun R_{L} kasvaa, kyllästyy jännite U_{CE} lopulta noin 0,2…0,3 volttiin, eikä laske sen alapuolelle, vaikka virtaa I_{B} tai vastusta R_{L} kasvatettaisiin. Huomaa, että vastuksen R_2 jännite tunnetaan.

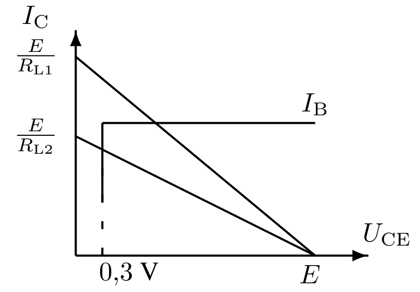
$$I_{\mathrm{B}} = I_1 - I_2 = \frac{E - U_{\mathrm{BE}}}{R_1} - \frac{U_{\mathrm{BE}}}{R_2} = 1 \text{ mA} \tag{206}$$

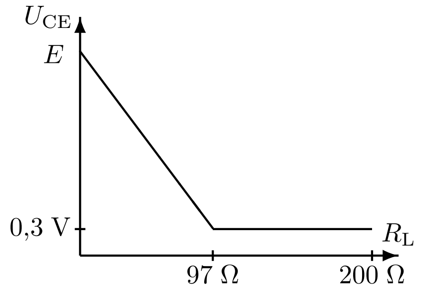
Lineaarisessa toiminnassa siis $I_{\mathrm{C}} = \beta I_{\mathrm{B}} = 100$ mA. Tutkitaan seuraavaksi, kuinka kauan tätä hupia riittää:

$$U_{\mathrm{CE}} = E - R_{\mathrm{L}}\underbrace{I_{\mathrm{C}}}_{\beta I_{\mathrm{B}}} = 0{,}3 \Rightarrow R_{\mathrm{L}} = \frac{E - 0{,}3}{\beta I_{\mathrm{B}}} = 97\ \Omega \tag{207}$$

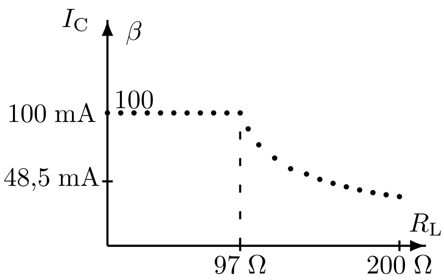
Kun $0 \leq R_L \leq 97\ \Omega$, on $I_C = 100$ mA. Jos R_L kasvaa yli 97 ohmin, alkaa β ja siten myös kollektorivirta pienentyä: $I_C \approx \frac{E-0{,}3}{R_L}$. Kahdensadan ohmin kohdalla virta on pienentynyt alle puoleen: $I_{CMIN} = \frac{E-0{,}3}{R_{LMAX}} = 48{,}5$ mA.

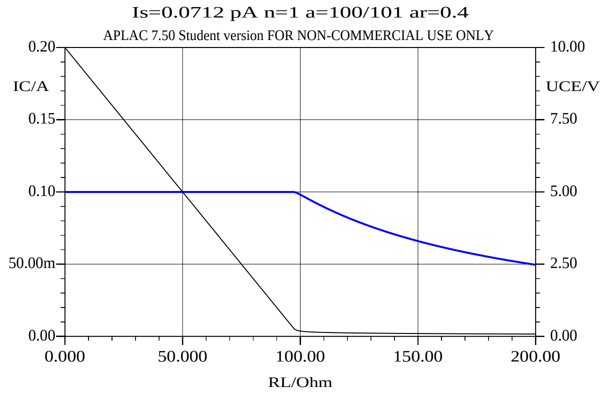
Transistorin yksinkertaistetut ominaiskäyrät, joihin tehtävän ratkaisu perustui:





Vastauksena saatu käyrä. Pystyakselin vasemmalla puolella kollektorivirta, oikealla puolella virtavahvistus. APLACilla piirretty käyrä on hyvin samanlainen, vaikka se perustuukin tarkempaan piirimalliin (Ebers–Moll). Käyrän tarkka muoto riippuu transistorin parametreistä.

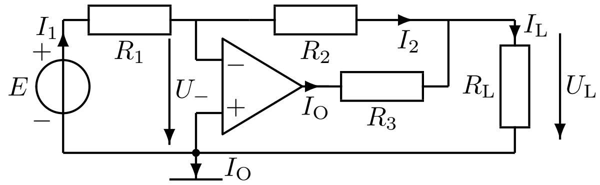




Harjoitus 8, sivut 333-352, (360-367).

Ideaalisen operaatiovahvistimen analyysi, aktiivinen suodatin, komparaattorin hystereesi.

801. Invertoiva vahvistin. Laske virta I_L. $E = 1$ V, $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 47$ kΩ, $R_3 = 100$ Ω, $R_L = 1000$ Ω.



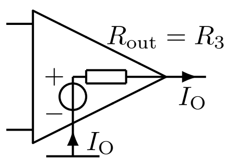
Operaatiovahvistin on alle euron maksava mikropiiri, todellinen elektroniikan yleistyökalu. Sen ominaisuudet on pitkälle standardoitu, jolloin lähes kaikki operaatiovahvistintyypit toimivat tavallisimmissa kytkennöissä samalla tavalla. Koska tuloliitäntöihin ($-$ ja $+$) ei kulje virtaa, on $I_2 = I_1$. Lähtöliitännän virta I_O tulee käyttöjännitelähteestä, jota ei ole piirretty näkyviin — sitä ei piirretä yleensäkään. Sama virta menee maapisteen kautta todellisuudessa takaisin käyttöjännitelähteeseen; tätä virtaa ei yleensä kuitenkaan tarvitse laskea. Huom! älä kirjoita maasolmulle virtalakia, koska kaikkia johtoja ei aina ole piirretty näkyviin, kuten juuri todettiin. Tuloliitännän ja maan välistä jännitettä merkitään U_- ja U_+. Lineaarisessa toiminnassa nämä ovat aina yhtä suuret. Koska $+$-tulo on kytketty maahan, on nyt $U_+ = 0$ ja samoin $U_- = 0$.

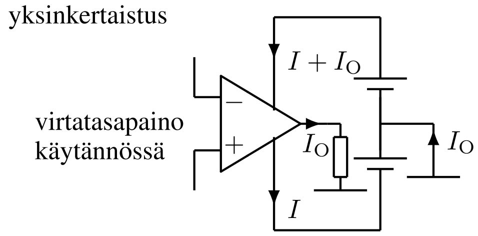
$$I_1 = \frac{E - U_-}{R_1} = \frac{E}{R_1} \tag{208}$$

$$I_2 = \frac{U_- - U_L}{R_2} = -\frac{U_L}{R_2} \Rightarrow U_L = -R_2 I_2 \tag{209}$$

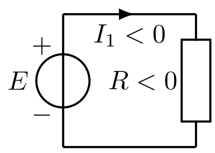
$$I_L = \frac{U_L}{R_L} = -\frac{R_2 I_2}{R_L} = -\frac{R_2}{R_L}\underbrace{\frac{E}{R_1}}_{I_1 = I_2} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}E}{R_L} = -4{,}7 \text{ mA} \tag{210}$$

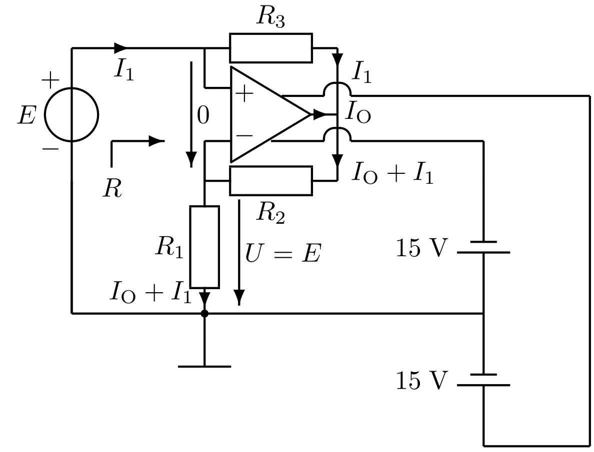
R_3 ei vaikuta teoriassa mitään; käytännössä se ei kuitenkaan saa olla liian suuri, jotta vahvistimen sallittua lähtöjännitealuetta ei ylitettäisi. Operaatiovahvistimen lähtöresistanssi R_{out} vaikuttaa laitteen toimintaan yhtä vähän kuin R_3. Toiminta ei muuttuisi, vaikka R_3 olisi oparin sisällä, kuten seuraavassa kuvassa. Oikealla käyttöjännitteen (esim. 2 x 5 V tai 2 x 15 V) kytkentä:





803. Negatiivinen resistanssi. Laske virrat I_O ja I_1 olettamalla operaatiovahvistin ideaaliseksi. $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ, $R_3 = 5$ kΩ, $E = 1$ V.





Yllä on myös esitettynä käyttöjännitelähteen mahdollinen kytkentätapa ja sen vaikutus maasolmun virtatasapainoon. Käyttöjännitteet (esim. ± 15 V) jätetään usein piirtämättä. Tuloliitäntöjen välillä ei nytkään ole potentiaalieroa:

$$-E + 0 + R_1(I_O + I_1) = 0 \Rightarrow (I_O + I_1) = \frac{E}{R_1} \tag{211}$$

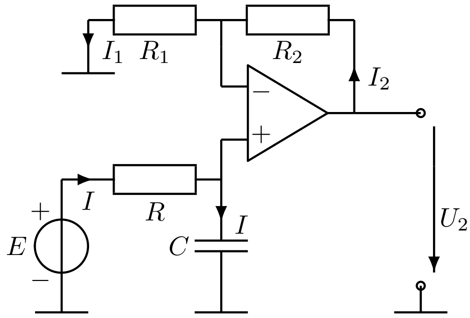
$$-E + R_3 I_1 + (R_1 + R_2)\underbrace{(I_O + I_1)}_{\frac{E}{R_1}} = 0 \tag{212}$$

$$I_1 = \frac{E - E\frac{R_1+R_2}{R_1}}{R_3} = \frac{E}{-\frac{R_1 R_3}{R_2}} = -0{,}4\ \mathrm{mA}\ ,\ \left(R = \frac{E}{I_1} = -\frac{R_1 R_3}{R_2}\right) \tag{213}$$

$$I_O = \frac{E}{R_1} - I_1 = 1{,}4\ \mathrm{mA} \tag{214}$$

Piiri näyttää negatiiviselta resistanssilta. Piirin tuottama ylimääräinen energia otetaan tietysti tasajännitelähteestä. Vahvistimien ja oskillaattoreiden toiminta perustuu luonnostaan negatiivisen resistanssin olemassaoloon, vaikka ilmiö jääkin käytännön piireissä usein huomaamatta. Tämän esimerkin käyttötarkoitus on havainnollistaa ilmiön olemassaoloa; kytkentää on käytetty myös kaaos-tutkimuksissa usein esiintyvän Chuan piirin osana.

805. Suodatin. Laske kuvan alipäästösuodattimen siirtofunktio. $\frac{U_2}{E}(\mathrm{j}\omega)$. Operaatiovahvistin oletetaan ideaaliseksi. $R = 1\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 9R_1$, $C = 1$ F.



Aktiiviset suodattimet on yksi operaatiovahvistimen tavallisista sovelluskohteista. Todellisuudessa operaatiovahvistimia käytetään kaikessa analogisessa signaalinkäsittelyssä, mutta myös monissa muissa kohteissa. R_1:n ja R_2:n virrat ovat keskenään samat ($I_1 = I_2$), samoin R:n ja C:n virrat keskenään. C:n ja R_1:n jännitteet ovat keskenään samat ($U_- = U_+$).

$$-R_1 \overbrace{I_1}^{I_2} - R_2 I_2 + U_2 = 0 \Rightarrow U_2 = (R_1 + R_2)\overbrace{I_2}^{\frac{U_-}{R_1}} \tag{215}$$

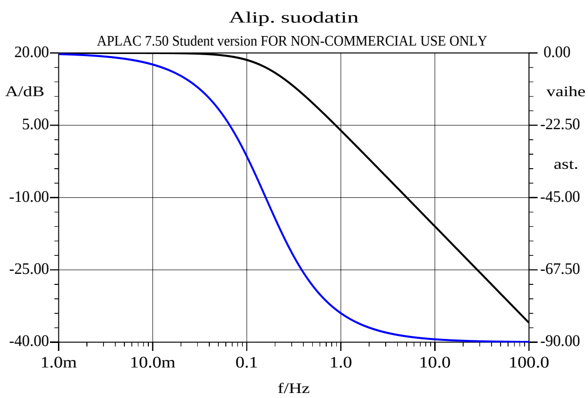
$$-E + RI + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \tag{216}$$

$$U_- = U_+ = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\underbrace{\frac{E}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}}_{I} = \frac{E}{\mathrm{j}\omega CR + 1} \tag{217}$$

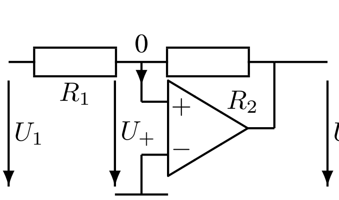
$$U_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\ \frac{E}{\mathrm{j}\omega CR + 1} = \frac{10}{\mathrm{j}\omega + 1} \tag{218}$$

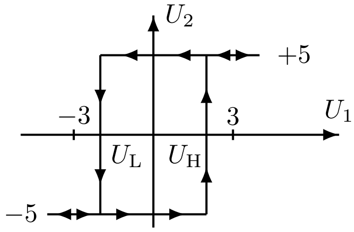
Tulos esitettynä kulmamuodossa (alla vahvistus- ja vaihekäyrä):

$$\frac{U_2}{E} = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}}\angle - \arctan\underbrace{\omega}_{\omega/1} \tag{219}$$



802. Komparaattori. Kuvan piiri on komparaattori, jossa on hystereesiä (Schmitt-triggeri). Käyttöjännitteet rajoittavat lähtöjännitteen välille -5 V…+5 V. Millä R_1:n arvolla piirin ominaiskäyrä on kuvan mukainen? $R_2 = 100$ kΩ, $-U_\mathrm{L} = U_\mathrm{H} = 2$ V.



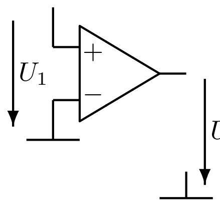


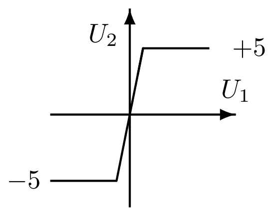
U_1	U_+	U_2
3	> 0	+5
-1,9	> 0	+5
-2	0	$\downarrow$ +5
-2	< 0	-5
-3	< 0	-5
1,9	< 0	-5
2	0	$\uparrow$ -5

Kuten huomaat, kaikissa muissa tehtävissä lähtöliitännästä on vastus tai jokin muu signaalitie operaatiovahvistimen negatiiviseen tuloon. Tämän takaisinkytkennän avulla opari pyrkii itse säätämään tuloliitäntöjen potentiaalieron nollaksi. Nyt näin ei ole, vaan kyseessä on positiivinen takaisinkytkentä; opari ei toimi lineaarisesti; U_+ ei nyt välttämättä ole yhtä suuri kuin U_-.

Siirrytään piirin ominaiskäyrällä oikeasta yläkulmasta alkaen taulukon osoittamalla tavalla (U_1:n lukuarvot ovat osin hihasta vedettyjä). Oletetaan aluksi, että $U_1 >> 0$, esim. $U_1 = 3$ V. Tällöin oparin lähtö U_2 on ajautunut positiiviseen ääriarvoonsa (looginen 1-tila), koska vahvistus on hyvin suuri. Pienennetään sitten tulojännitettä U_1 negatiiviseksi kunnes U_+ putoaa alle nollan. Tällöin U_2 hyppää negatiiviseen ääriarvoonsa (0-tila). Tämä tapahtuu, kun $U_1 = U_\mathrm{L}$. Vastaava muutos tapahtuu toiseen suuntaan, kun $U_1 = U_\mathrm{H}$ (vrt. magneetin hystereesikäyrä). Hystereesin takia pienet häiriöt eivät aiheuta tarpeettomia tilan muutoksia ja siirtyminen 0- ja 1- tilan välillä sujuu nopeasti, vaikka tulojännite muuttuisi hitaasti.

Operaatiovahvistin toimii normaalisti komparaattorina ilman hystereesiä (alla). Tällöin on vaarana, että tietyllä tulojännitealueella lähtö jää lillumaan loogisen nollatilan ja ykköstilan välimaastoon. Digitaalitekniikassa tämä on kiellettyä vyöhykettä.





Vastusten virrat ovat yhtä suuret:

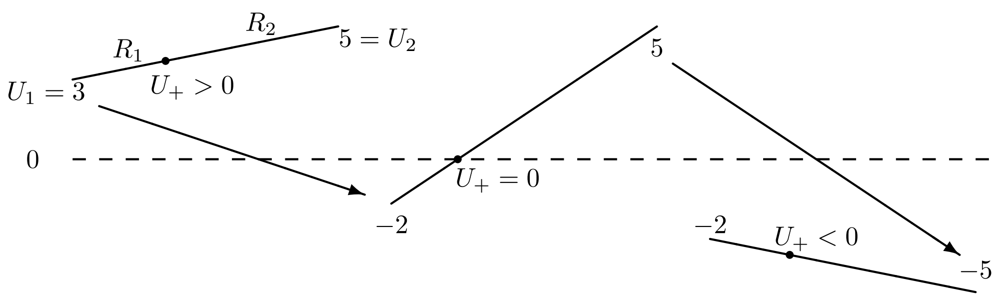
$$\frac{U_2 - U_+}{R_2} = \frac{U_+ - U_1}{R_1} \tag{220}$$

Poimitaan taulukosta jännitteille lukuarvot sellaiselta riviltä, jossa myös U_+:n arvo tunnetaan. Tällaisia rivejä on kaksi, molemmat tuottavat saman vastauksen:

$$U_2 = +5 \text{ V} \quad \& \quad U_+ = 0 \Rightarrow U_1 = -\frac{R_1}{R_2}U_2 = U_\mathrm{L} \Rightarrow R_1 = -\frac{U_\mathrm{L}}{U_2}R_2 = 40 \text{ k}\Omega \tag{221}$$

$$U_2 = -5 \text{ V} \quad \& \quad U_+ = 0 \Rightarrow U_1 = -\frac{R_1}{R_2}U_2 = U_\mathrm{H} \Rightarrow R_1 = -\frac{U_\mathrm{H}}{U_2}R_2 = 40 \text{ k}\Omega \tag{222}$$

Alla olevassa kuvassa yritän esittää animaationa saman keppikuvaelman, jonka olen näyttänyt harkoissa. Kun kepin vasemmassa päässä oleva jännite tippuu kolmesta voltista miinus kahteen volttiin, kastuu U_+:n kohdalla oleva merkki (katkoviiva on veden pinta). Samalla kepin oikea pää sukeltaa miinus viiteen metriin (siis volttiin). Sama siirtymä ja vähän enemmänkin esitettiin edellä olevassa taulukossa.

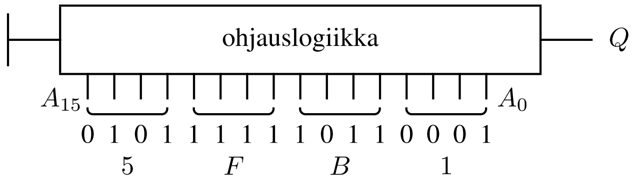


Harjoitus 9, sivut 447-464, 465, 467-473, (477-480).

Kombinaatiologiikka, Boolen algebra, De Morganin teoreema, Karnaugh'n kartta, totuustaulukko, heksadesimaaliluvut, sekvenssipiirit.

9. harjoituksessa ei tarvita Kirchhoffin lakeja lainkaan — iloitkoon, ken tahtoo.

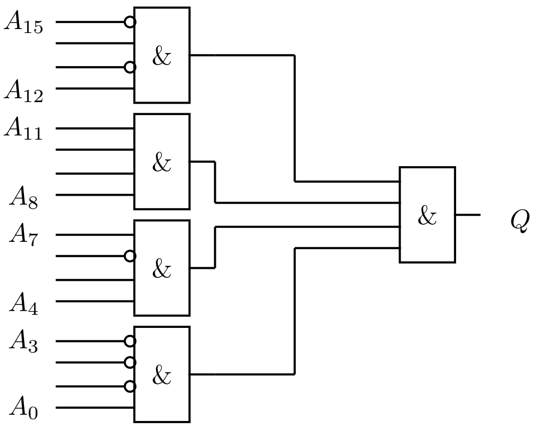
901. Kombinaatiologiikka. Suunnittele porttipiireillä oheinen ohjauslogiikka. Lähdön Q halutaan olevan 1 silloin ja vain silloin, kun mikroprosessorin osoiteväylässä on heksadesimaaliluku 5FB1. Älä käytä Karnaugh'n karttaa.



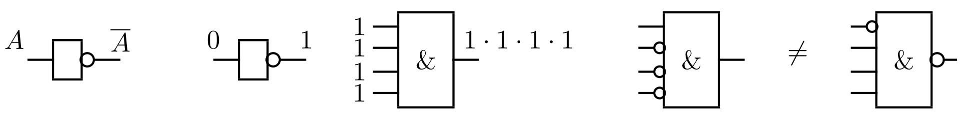
Heksadesimaaliluvut 5, F, B ja 1 koostuvat neljän bitin ryhmistä, joissa A_{15}, A_{11}, A_7, A_3 ovat eniten merkitsevät bitit (MSB) ja A_{12}, A_8, A_4, A_0 vähiten merkitsevät bitit (LSB).

$$Q = \underbrace{\overline{A}_{15} \cdot A_{14} \cdot \overline{A}_{13} \cdot A_{12}}_{5} \cdot \underbrace{A_{11} \cdot A_{10} \cdot A_9 \cdot A_8}_{F} \cdot \underbrace{A_7 \cdot \overline{A}_6 \cdot A_5 \cdot A_4}_{B} \cdot \underbrace{\overline{A}_3 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_1 \cdot A_0}_{1}$$

$Q = 1$ vain, jos $A_0 = 1$ & $A_1 = 0$ & $\ldots A_{15} = 0$. Sähköinen toteutus riippuu käytettävissä olevista komponenteista, esim:

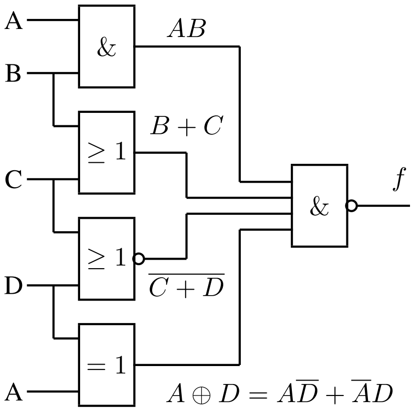


Komplementointirengas toteutetaan invertteripiirillä. Alla invertterin ja JA-portin toimintaperiaate. Huomaa loogisten operaatioiden suoritusjärjestys:



902. Boolen algebra. Kirjoita f:n lauseke muuttujien A, B, C ja D avulla. Yksinkertaista lauseketta ja laadi lopuksi totuustaulukko.

Tarkastellaan ensin jokaisen lohkon toimintaa erikseen. Nämä välitulokset yhdistetään sitten oikealla olevalla NAND-portilla. Se kertoo ensin neljä osalauseketta keskenään. Lopuksi piirin oikeassa reunassa oleva komplementointirengas vetää viivan koko lausekkeen päälle. Lauseketta voi yksinkertaistaa monella eri tavalla. Hyvinkin erilaisten välivaiheiden jälkeen on aina mahdollista päästä samaan lopputulokseen. Lausekkeen yksinkertaistaminen perustuu siihen, että sama kirjain esiintyy kahdessa tai useammassa kohtaa lauseketta. Tällöin on ainakin toiveita siitä, että lauseke yksinkertaistuu, jos lausekkeen osat pystytään yhdistämään kerto- tai yhteenlaskulla. Huomaa, että Boolen algebrassa on käytössä vain numerot 0 ja 1. Monet laskutoimitukset näyttävät tästä syystä vähän oudoilta. Vaikka JA-operaatio vastaakin täysin aritmetiikan kertolaskua, ei plusmerkillä merkitty TAI-operaatio ole sama kuin matematiikan yhteenlasku. Tosin ainoa poikkeus on 1+1=1.



$$
\begin{aligned}
f &= \overline{AB(B+C)(\overline{C+D})(A\overline{D}+\overline{A}D)} \\
&= \overline{(ABB+ABC)(\overline{C}\cdot\overline{D})(A\overline{D}+\overline{A}D)} \\
&= \overline{(1+C)AB(A\overline{D}+\overline{A}D)(\overline{C}\cdot\overline{D})} \\
&= \overline{(ABA\overline{D}+AB\overline{A}D)(\overline{C}\cdot\overline{D})} \\
&= \overline{(AAB\overline{D}+A\overline{A}BD)(\overline{C}\cdot\overline{D})} \\
&= \overline{AB\overline{D}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}} = \overline{AB\overline{C}\cdot\overline{D}}
\end{aligned}
$$

A	B	C	D	f
1	1	0	0	0
Muulloin				1

Kun numeroita on näinkin vähän, on lausekkeiden arvoa mahdollista testata kaikilla mahdollisilla muuttujien arvoyhdistelmillä.

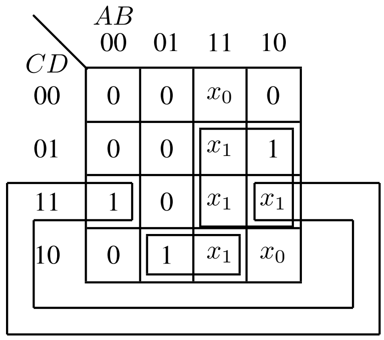
903. Karnaugh'n kartta. Suunnittele Karnaugh'n kartan avulla piiri, jonka lähtö on 1, kun tulot A, B, C ja D muodostavat kolmella jaollisen kokonaisluvun välillä $0 \ldots 9$. Piirin toimintaa ei tarvitse määritellä välillä 10-15.

Tässä tehtävässä suunnitellaan logiikkapiiri kytkentäkaavioksi asti sanallisesta tehtävänmäärittelystä alkaen. Aloitetaan laatimalla totuustaulukko tehtävänannon perusteella. Kun totuustaulukosta on muodostettu kirjainlauseke, on kytkentäkaavion piirtäminen triviaalia (vaikkei se ekalla kerralla siltä ehkä tunnu). Ongelmaksi jääkin kirjainlausekkeen muodostaminen.

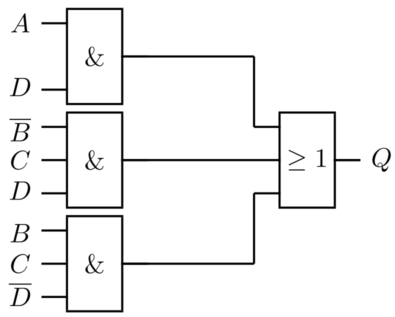
Tehokas apuväline siihen on Karnaugh'n kartta. Se soveltuu parhaiten tilanteisiin, joissa muuttujia on 3 tai 4. Karnaugh'n kartassa totuustaulukon funktiosarake (yleensä f tai Q) on siirretty matriisimuotoiseen 4x4-ruudukkoon. Jokaista totuustaulukon riviä vastaa yksikäsitteisesti yksi matriisin ruutu. Ruudut määräytyvät vaaka- ja pystykoordinaattien perusteella niinkuin puhelinluettelon kartoissa. Määrittelemättömät tilat voidaan merkitä x:llä, joka voidaan tilanteen mukaan tulkita nollaksi tai ykköseksi. Ykköset rajataan mahdollisimman suuriin suorakaidelaatikoihin, joiden korkeus tai leveys ei kuitenkaan saa olla kolme ruutua. Suorakaiteet saavat jatkua reunan yli. Jokainen suorakaide voidaan yksikäsitteisesti kuvata yksinkertaisella kertolaskulausekkeella. Koko funktio on eri laatikoiden välinen TAI-operaatio. Kirjassa on selitetty Karnaugh'n karttaa paljon perusteellisemmin.

Totuustaulukko ja Karnaugh'n kartta:

N	A	B	C	D	Q
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
Muut					x



$x_0 = 0 \quad x_1 = 1$



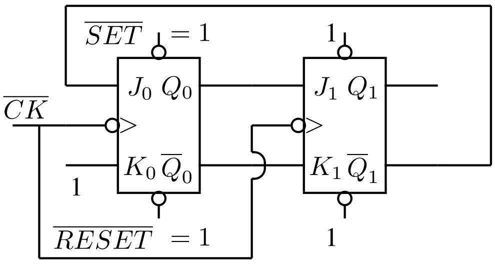
$$Q = AD + \overline{B}CD + BC\overline{D} \tag{223}$$

Karnaugh'n kartassa on pyritty rajaamaan mahdollisimman suuria ykkösalueita valitsemalla osa x:istä nollaksi ja osa ykköseksi.

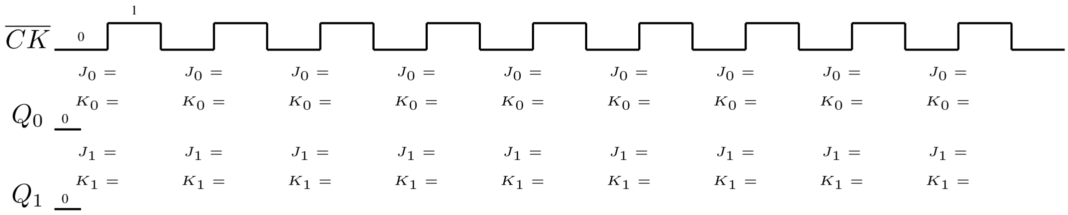
904. Kiikku eli flip-flop. Täydennä kuvan sekvenssipiirin aikatasoesitys. $\overline{SET}$ ja $\overline{RESET}$ ovat lepotilassa eli 1. Alaindeksit n ja $n+1$ viittaavat kahteen peräkkäiseen kellojaksoon.

Tarkista ensin kuvasta, minkä verran käyriä oli alunperin annettu. Kellopulssin lisäksi on määritelty alkutila $Q_0 = 0$ ja $Q_1 = 0$. Oheinen totuustaulukko määrittelee molempien kiikkujen toimintaa. Nuoli alaspäin tarkoittaa sitä, että tilanmuutokset voivat tapahtua vain kellopulsiin laskevan reunan kohdalla (vrt. kuva). Ohjauspinnien J ja

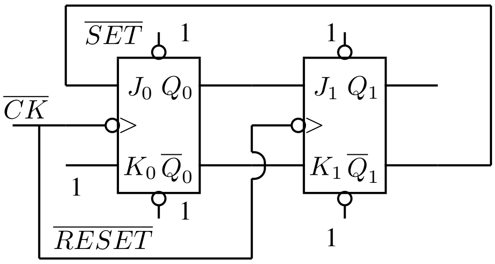
K kytkentä on katsottava kaaviosta. Sieltä nähdään, että J_0:aa säätelee $\overline{Q}_1$, K_0 on kytketty pysyvästi ykköseen, jne.



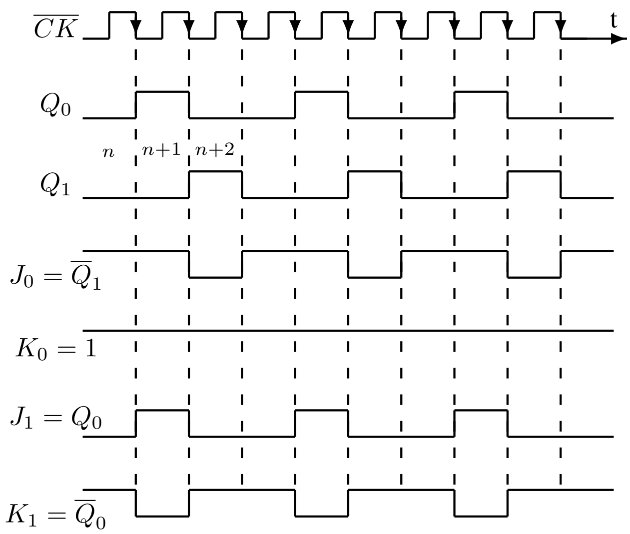
J	K	$\overline{CK}$	Q_{n+1}	selitys
0	0	$\downarrow$	Q_n	tila säilyy
1	0	$\downarrow$	1	asetus
0	1	$\downarrow$	0	nollaus
1	1	$\downarrow$	$\overline{Q}_n$	tila vaihtuu



Katsotaan lähtöjen ja ohjausnastojen tilat ennen ensimmäistä kellopulssin laskevaa reunaa: $Q_0 = 0$, $Q_1 = 0$, $J_0 = 1$, $K_0 = 1$, $J_1 = 0$ ja $K_1 = 1$. Nämä tilat ovat voimassa vähintään ensimmäiseen kellopulssin laskevaan reunaan asti. Väliaikatiedoista nähdään, että vasen kiikku on totuustaulukon viimeisen rivin tilanteessa ja oikea kiikku totuustaulukon toiseksi viimeisellä rivillä. Siis Q_0 vaihtaa tilaansa ja Q_1 nollataan (eli pysyy nollassa). Tästä alkaa uusi kierros. Tutkitaan jälleen ohjausnastojen tilat ja katsotaan totuustaulukosta, mitä nyt tehdään. Toisella kellojaksolla vasen kiikku on edelleen viimeisellä rivillä, mutta oikea kiikku toimii taulukon toisen rivin mukaan: Q_1 asettuu ykköseksi. Kun tarkastelua jatketaan useiden kellojaksojen ajan, huomataan käyrien jaksollisuus.



J	K	$\overline{CK}$	Q_{n+1}	selitys
0	0	$\downarrow$	Q_n	tila säilyy
1	0	$\downarrow$	1	asetus
0	1	$\downarrow$	0	nollaus
1	1	$\downarrow$	$\overline{Q}_n$	tila vaihtuu



Aluksi tunnetaan $Q_0 = 0$ ja $Q_1 = 0$ lähtötilanteessa. J_0, K_0, J_1 ja K_1 nähdään kytkentäkaaviosta. Mahdollinen tilan muutos tapahtuu kellopulssin laskevalla reunalla (koska $\overline{CK}$ eikä CK). $\overline{SET}$ ja $\overline{RESET}$ ovat ykkösiä eli lepotilassa. J_0 ja K_0 määräävät, millä totuustaulukon rivillä vasen kiikku toimii. Samoin J_1 ja K_1 oikealle kiikulle. Piiri jakaa kellotaajuuden kolmella. Q_0 tai Q_1 voi toimia lähtönä. Sopivalla ketjulla pulssitaajuus voidaan jakaa millä tahansa kokonaisluvulla.

Kirjassa on käsitelty muitakin sekvenssipiirejä kuin tehtävän JK-kiikku.

Harjoitus 10, sivut 481-498.

A/D- ja D/A-muuntimet, resoluutio, U_{FS}, U_{FSR}, algoritminen ja flash-A/D-muunnin.

1001. Resoluutio ym. Laske 12 bittisen A/D- tai D/A-muuntimen resoluutio:
a) prosentteina, b) desibeleinä, c) jännitteenä, kun $U_{\mathrm{MIN}} = -5$ V ja $U_{\mathrm{MAX}} = +5$ V
Kuinka monta bittiä muuntimessa vähintään tarvitaan, jos mittariin halutaan:
d) $3\frac{1}{2}$-numeron näyttö (max. ± 1999), e) $4\frac{1}{2}$-numeron näyttö (max. ± 19999)
f) Mitkä ovat 3-bittisen D/A-muuntimen mahdolliset lähtöjännitetasot, jos sen toiminta-alue on $0 \dots 560$ mV? ($U_{\mathrm{FSR}} = 560$ mV).

Resoluutio tarkoittaa erottelukykyä. Koska digitaalisissa järjestelmissä mahdollisten tilojen lukumäärä on tietty kokonaisluku, on myös resoluutio tarkasti määrätty. Tilojen määrä voi olla esim. erilaisten näytössä esiintyvien lukuarvojen kokonaismäärä. Tällöin suhteellinen resoluutio on yhden suhde tähän lukuun (n:llä bitillä voidaan esittää 2^n erilaista lukua). Koska kyse on yleensä jännite- tai virtasuhteista, lasketaan desibelit kertoimella 20. Muuntimen jännitealue on tapauskohtainen, usein alue alkaa nollasta. Jänniteresoluution kannalta oleellista on jännitealueen laajuus. Luonnollisesti mitattavan jännitteen täytyy olla toiminta-alueen asettamissa rajoissa.

$$\text{a) } R = 100\frac{1}{2^n}\% = \frac{100}{2^{12}}\% = 0{,}0244\% \tag{224}$$

$$\text{b) } R_{\mathrm{dB}} = 20 \lg 1/2^n \text{ dB} = -20 \cdot 12 \lg 2 \text{ dB} = -72{,}2 \text{ dB} \tag{225}$$

$$\text{c) } \Delta U = \frac{U_{\mathrm{MAX}} - U_{\mathrm{MIN}}}{2^n} = \frac{10}{2^{12}} = 2{,}44 \text{ mV} \tag{226}$$

Karvalakkimallisissa yleismittareissa tavallisin näyttötyyppi on $3\frac{1}{2}$-numeron näyttö. Tällainen näyttö pystyy esittämään positiiviset kokonaisluvut välillä 0 . . . 1999 ja useimmiten myös negatiiviset kokonaisluvut aina -1999:ään asti. Tällöin eri näyttötiloja on 3999. Esim. laboratorion yleismittareissa mitta-alueet ovat 200 mV, 2 V, 20 V, jne. Kokonaisluku n löydetään helposti kokeellisesti:

$$\text{d) } 2^n > 3999 \Rightarrow n = 12 \tag{227}$$

$$\text{e) } 2^n > 39999 \Rightarrow n = 16 \tag{228}$$

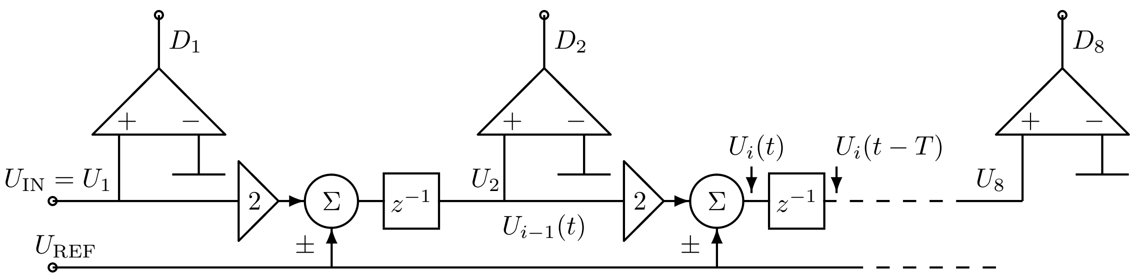
d-kohdan 12 bittiä tulee melko tehokkaasti käytetyksi $2^{12} = 4096$, mutta e-kohdassa käyttämättä jää yli 25 000 eri tilaa. 16-bittisen muuntimen yhteydessä voi ollakin järkevää ottaa jännitealueeksi $\pm 32\,500$. Tämä vaatii suurta tarkkuutta mittarin muultakin elektroniikalta kuin pelkältä A/D-muuntimelta. Seuraavan kohdan 3-bittisiä muuntimia ei käytännössä liene olemassa, mutta sama periaate on helposti laajennettavissa mille tahansa bittimäärälle:

$$\text{f) } \Delta U = U_{\mathrm{FSR}}/2^n = 560 \text{ mV}/8 = 70 \text{ mV} \tag{229}$$

U_{FSR} määritellään yleensä niin, että U_{D} jää suurimmillaan ΔU:n päähän siitä. Ensimmäistä binäärikoodia vastaava jännitetaso voi periaatteessa olla joku muukin kuin 0 V.

BIN	U_{D}/mV	BIN	U_{D}/mV	BIN	U_{D}/mV	BIN	U_{D}/mV
000	0	010	140	100	280	110	420
001	70	011	210	101	350	111	490

1004. 1-bittinen liukuhihna. Kuvassa on algoritminen A/D-muunnin (pipeline-rakenne). Referenssijännite $U_{\mathrm{REF}} = 5{,}0$ V tuodaan summaimelle miinusmerkkisenä, jos toinen summattava jännite on positiivinen. Jos taas toinen summattavista on negatiivinen, summataan U_{REF} positiivisena. Mitkä olisivat lähdön digitaalikoodit, jos muunnin olisi 8-bittinen ja a) $U_{\mathrm{in}} = 1$ V, b) $U_{\mathrm{in}} = -4{,}95$ V tai c) $U_{\mathrm{in}} = 5{,}0$ V ? Lohko z^{-1} tarkoittaa kellojakson mittaista viivettä (vrt. z-muunnos); se voidaan korvata tehtävässä johdolla.



Viivelohkoa tarvitaan käytännössä erottamaan peräkkäiset vaiheet ajallisesti toisistaan. Piiriin voidaan syöttää jo uusi jännite sisään sillä aikaa, kun ketjun häntä laskee vielä muunnosta. Merkitään lohkonumeroa alaindeksillä i. Kuten kuvasta näkyy, yksi lohko toteuttaa yhtälön:

$$U_i = 2U_{i-1} \pm U_{\mathrm{REF}} \qquad \& \qquad U_i = U_+ \qquad \& \qquad U_- = 0 \ (i = 1, 2, \dots 8) \tag{230}$$

Tämä pätee kuitenkin vasta, kun $i \geq 2$. U_1 on annettu tehtävässä. Komparaattori antaa ykkösen, jos $U_+ > U_-$ eli $U_i > 0$.

$U = 2U \pm 5$	$<> 0$	D_i
$1{,}0 = U_{\text{in}}$	$> U_-$	1 (MSB)
$2{,}0 - 5$	< 0	0
-1	< 0	0
$+3$	> 0	1
$+1$	> 0	1
-3	< 0	0
-1	< 0	0
$+3$	> 0	1 (LSB)

i	$U = 2U \pm 5$	$<> 0$	D_i
1	$-4{,}95 = U_{\text{in}}$	$< U_-$	0
2	$-9{,}90 + 5$	< 0	0
3	$-4{,}80$	< 0	0
4	$-4{,}60$	< 0	0
5	$-4{,}20$	< 0	0
6	$-3{,}40$	< 0	0
7	$-1{,}80$	< 0	0
8	$+1{,}40$	> 0	1

$U = 2U \pm 5$	$<> 0$	D_i
$5{,}0 = U_{\text{in}}$	$> U_-$	1
$10{,}0 - 5$	> 0	1
5	> 0	1
5	> 0	1
5	> 0	1
5	> 0	1
5	> 0	1
5	> 0	1

Taulukon tulosten perusteella näyttäisi siltä, että muuntimen jännitealue on $-U_{\text{REF}} \ldots U_{\text{REF}}$. Lasketaan sen mukaan taulukon digitaalikoodeja vastaavat teoreettiset jännitteet (tämä on vain tulosten tarkastelua ja pähkäilyä):

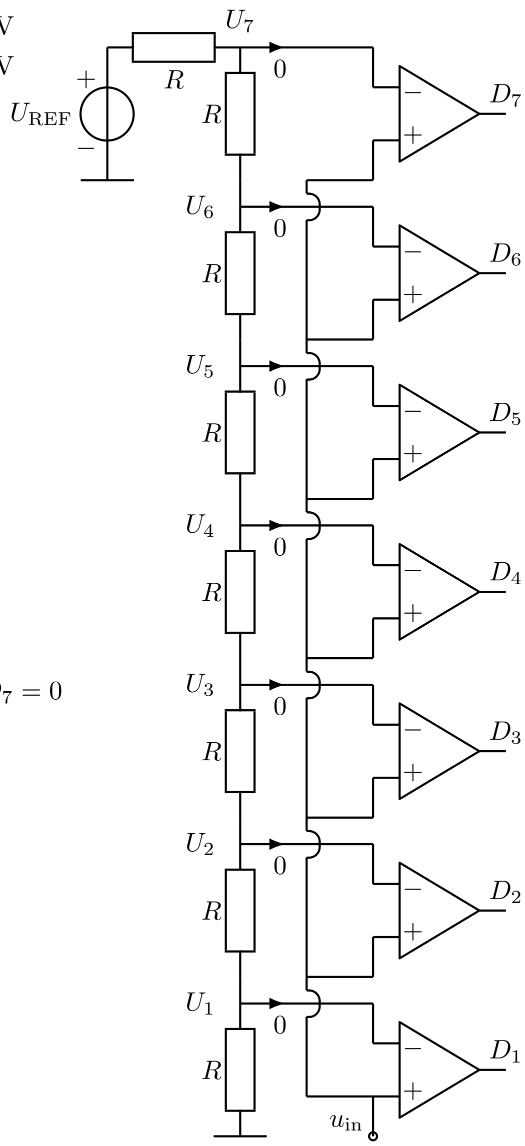
$$\Delta U = \frac{U_{\text{REF}} - (-U_{\text{REF}})}{2^8} = \frac{10}{256}\ \text{V} \tag{231}$$

$$0000\ 0001 \Rightarrow -U_{\text{REF}} + \Delta U = -4{,}961\ \text{V} \tag{232}$$

$$1001\ 1001 \Rightarrow -U_{\text{REF}} + 153\Delta U = 0{,}977\ \text{V} \tag{233}$$

$$1111\ 1111 \Rightarrow -U_{\text{REF}} + 255\Delta U = 4{,}961\ \text{V} \tag{234}$$

1002. Simultaani-A/D.
Kuva esittää 3-bittistä simultaani- (flash-) A/D-muunninta. Mitä ovat digitaalilähtöjen $D_1 \ldots D_7$ tilat, kun muunnettava jännite $u_{\text{in}} = 0{,}7U_{\text{REF}}$? Komparaattorissa (vrt. operaatiovahvistin) $D_i = 1$, kun $U_+ > U_-$ ja $D_i = 0$ muuten ($i = 1, 2, \ldots 7$).



$$u_{\text{in}} = 0{,}7U_{\text{REF}} = \frac{5{,}6}{8}U_{\text{REF}} \tag{235}$$

$$U_7 = \frac{7R}{7R + R}U_{\text{REF}} = \frac{7}{8}U_{\text{REF}} > u_{\text{in}} \Rightarrow D_7 = 0 \tag{236}$$

$$U_6 = \frac{6}{8}U_{\text{REF}} > u_{\text{in}} \Rightarrow D_6 = 0 \tag{237}$$

$$U_5 = \frac{5}{8}U_{\text{REF}} < u_{\text{in}} \Rightarrow D_5 = 1 \tag{238}$$

$$U_4 = \frac{4}{8}U_{\text{REF}} < u_{\text{in}} \Rightarrow D_4 = 1 \tag{239}$$

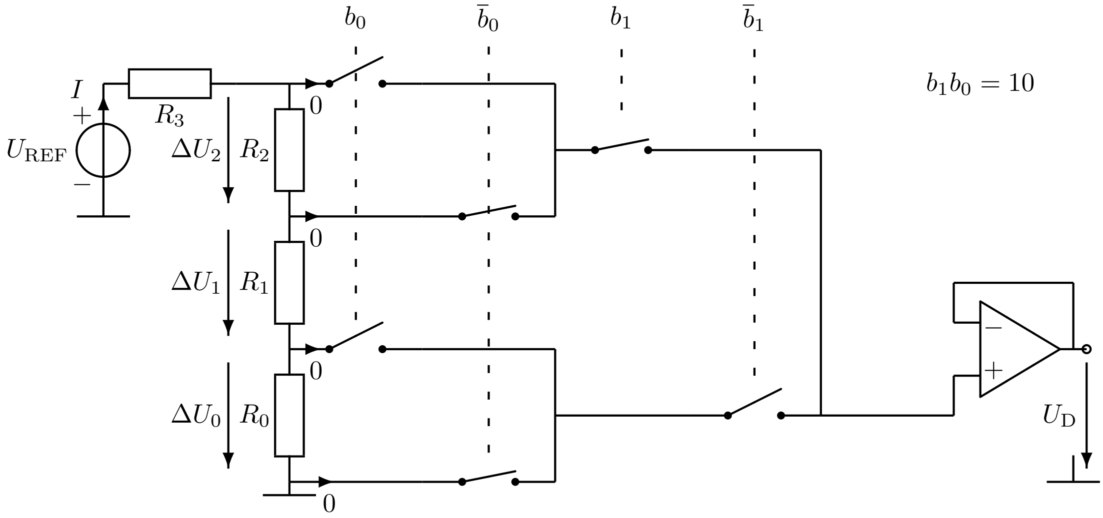
$$U_3 = \frac{3}{8}U_{\text{REF}} < u_{\text{in}} \Rightarrow D_3 = 1 \tag{240}$$

$$U_2 = \frac{2}{8}U_{\text{REF}} < u_{\text{in}} \Rightarrow D_2 = 1 \tag{241}$$

$$U_1 = \frac{1}{8}U_{\text{REF}} < u_{\text{in}} \Rightarrow D_1 = 1 \tag{242}$$

Jännitteenjakajassa jännitteet jakautuvat vastusten suhteessa, yhtä suurilla vastuksilla on yhtä suuret jännitteet. Operaatiovahvistimia käytetään tässä analogisina komparaattoreina eli jännitevertailijoina. Tähän tarkoitukseen on suunniteltu erityisiä operaatiovahvistintyyppejä, mutta tavallinenkin opari toimii näin. Toiminta on määritelty yleispätevästi tehtävässä. Suuren tuloresistanssin takia komparaattoreille ei mene virtaa (muutoin jännitteenjakokaavaa ei edes voisi käyttää). Komparaattorien lähtöliitännät ajautuvat ilman negatiivista takaisinkytkentää, joko positiiviseen tai negatiiviseen ääriarvoonsa, mitkä vastaavat loogista ykkös- ja nollatilaa.

1003. $2^n R$**-tyyppinen D/A.** Mitoita D/A-muuntimen vastukset $R_1 \dots R_3$ siten, että $U_\mathrm{D} = 20\lg(D+1)$. Valitaan: $R_0 = 12$ kΩ, $U_\mathrm{REF} = 20$ V. Kytkin on auki, kun $b_i = 0$ ja kiinni, kun $b_i = 1$.



Tässä mallissa on tehtävän 1002 A/D-muunnin tavallaan käännetty toisinpäin D/A-muuntimeksi — molemmat toteutukset perustuvat jännitteenjakajalla toteutettuihin referenssijännitteisiin. Kuvan muunnin on vain kaksibittinen, mutta sama periaate on laajennettavissa mille tahansa bittimäärälle; b_0 on LSB eli vähiten merkitsevä bitti. Pienien fet-kytkimien integroitavuus on hyvä. Kytkinrykelmä toteuttaa neliasentoisen vaihtokytkimen; elektronisena kytkimenä sitä olisi hankala toteuttaa mekaanisen kytkimen tapaan. U_D:n likiarvot oli valmiiksi laskettu tehtävässä annettuun taulukkoon.

D	b_1	b_0	U_D/V
3	1	1	12,0
2	1	0	9,5
1	0	1	6,0
0	0	0	0

Jokaista bittikoodia vastaa suora reitti vastusketjusta kytkinten läpi operaatiovahvistimelle. Opari on kytketty jänniteseuraajaksi: jännitevahvistus $A_u = 1$, koska normaalissa lineaarisessa toiminnassa $U_\mathrm{D} = U_+$. Taulukosta saadaan vastusten jännitteet. Kaikissa vastuksissa on sama virta, koska kytkimien läpi ei kulje virtaa. Virta lasketaan alimman vastuksen tunnetun resistanssin perusteella. Yleensäkin operaatiovahvistinpiirejä mitoitettaessa yksi vastusarvo voidaan valita referenssiksi. Tässä ΔU ei olekaan vakio vaan se vaihtetelee oheisen taulukon määräämällä tavalla.

$$U_{R_0} = 6\text{ V} \Rightarrow I = \frac{6\text{ V}}{R_0} = 0{,}5\text{ mA} \tag{243}$$

$$U_{R_1} = (9{,}5 - 6)\text{ V} \Rightarrow R_1 = \frac{3{,}5\text{ V}}{I} = 7000\ \Omega \tag{244}$$

$$U_{R_2} = (12 - 9{,}5)\text{ V} \Rightarrow R_2 = \frac{2{,}5\text{ V}}{I} = 5000\ \Omega \tag{245}$$

$$U_{R_3} = (20 - 12)\text{ V} \Rightarrow R_3 = \frac{8\text{ V}}{I} = 16\,000\ \Omega \tag{246}$$

HUOM! Laskuharjoitukset päättyvät tähän, ohessa vielä kertausluennolla käsiteltävät tehtävät.

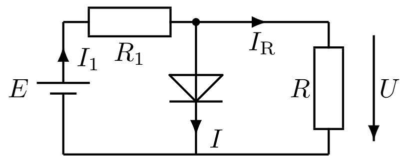
Kimmon turvaisku: Pidä näppisi irti sähköstä!

S-55.103 SÄHKÖTEKNIIKKA

Kimmo Silvonen

Kertausluento II. Kaksi kuvitteellista toista välikoetta (suppea kooste vanhoista koetehtävistä). Oikeassa välikokeessa on mukana yksi laskaritehtävistä. Lisää tehtäviä on PDF-muodossa www:ssä: *www.ct.hut.fi/courses/ tentit/main.html*).

1. Kuinka suuri vastus R tarvitaan diodin rinnalle, jotta sen jännite $U = 0{,}7$ V. Käytä diodin ominaiskäyrän yhtälöä. $E = 1{,}5$ V, $R_1 = 1250\ \Omega$, $I_S = 0{,}49$ nA, $nU_T = 50$ mV.



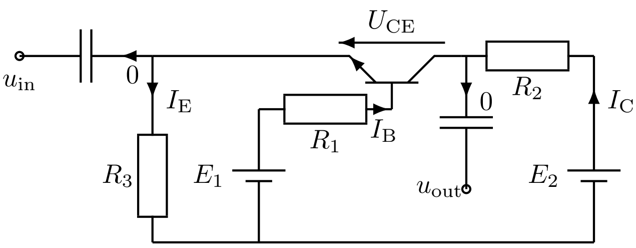
$$I = I_S \left(e^{U/(nU_T)} - 1\right) = 589\ \mu\text{A} \tag{247}$$

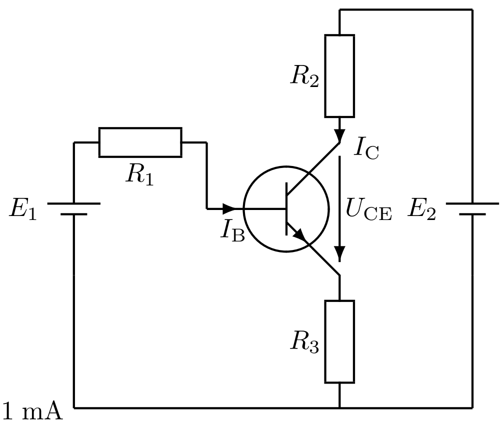
$$I_1 = \frac{E - U}{R_1} = 640\ \mu\text{A} \tag{248}$$

$$I_R = I_1 - I \approx 51\ \mu\text{A} \tag{249}$$

$$R = \frac{U}{I_R} = 13800\ \Omega \tag{250}$$

2. Laske jännite U_{CE}. $\beta = 100$, $R_1 = 1{,}29$ kΩ, $R_2 = R_3 = 10\ \Omega$, $U_{BE} = 0{,}7$ V, $E_1 = 3$ V, $E_2 = 5$ V. Sama kuva kahtena versiona. Kyseessä on yhteiskantakytkentä; vasemmalle on merkitty tulo- ja lähtöliitäntä, joita ei tässä tehtävässä käsitellä (DC).





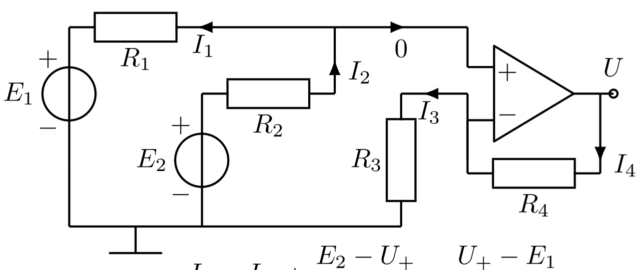
$$-R_3 \underbrace{I_E}_{(\beta+1)I_B} - U_{BE} - R_1 I_B + E_1 = 0 \tag{251}$$

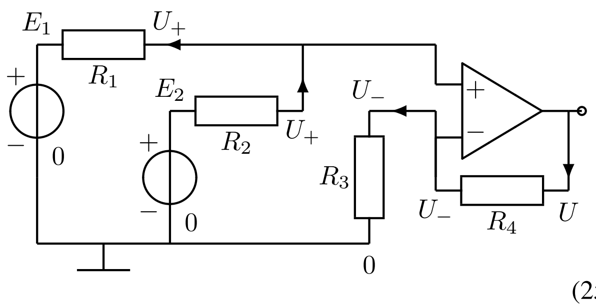
$$\Rightarrow I_B = \frac{E_1 - U_{BE}}{R_1 + (\beta+1)R_3} = \frac{3 - 0{,}7}{1290 + 101 \cdot 10} = 1\ \text{mA} \tag{252}$$

$$-R_3 \underbrace{I_E}_{(\beta+1)I_B} - U_{CE} - R_2 \underbrace{I_C}_{\beta I_B} + E_2 = 0 \tag{253}$$

$$\Rightarrow U_{CE} = E_2 - R_2\beta I_B - R_3(\beta+1)I_B = 5 - 1 - 1{,}01 = 2{,}99\ \text{V} \tag{254}$$

3. Laske jännite U. $R_1 = R_2 = 10$ kΩ, $R_3 = R_4 = 22$ kΩ, $E_1 = 2$ V, $E_2 = 4$ V. Oikealla olevaan kuvaan on merkitty potentiaalit maahan nähden (vrt. alla olevat yhtälöt).





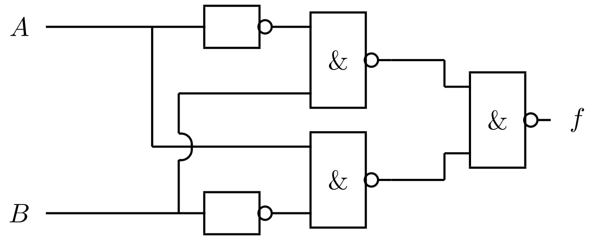
$$I_2 = I_1 \Rightarrow \frac{E_2 - U_+}{R_2} = \frac{U_+ - E_1}{R_1} \tag{255}$$

$$\frac{E_2}{R_2} - \frac{U_+}{R_2} = \frac{U_+}{R_1} - \frac{E_1}{R_1} \Rightarrow U_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2 = U_- \tag{256}$$

$$I_4 = I_3 \Rightarrow \frac{U - U_-}{R_4} = \frac{U_- - 0}{R_3} \tag{257}$$

$$U = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) U_- = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2\right) = 6\ \text{V} \tag{258}$$

4. Tutki totuustaulukon avulla, minkä loogisen funktion oheinen piiri toteuttaa.

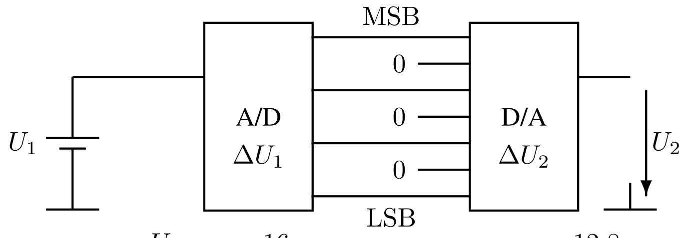


$$f = \overline{\overline{\overline{A}B}\;\overline{A\overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A}B}} + \overline{\overline{A\overline{B}}} = \overline{A}B + A\overline{B} \qquad (259)$$

A	B	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$\overline{A}B + A\overline{B}$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Näyttää olevan yksinomainen tai eli XOR.

5. Nelibittisen A/D-muuntimen $U_{\mathrm{FSR1}} = 16$ V. Se on yhdistetty typerästi 7-bittiseen D/A-muuntimeen, jonka $U_{\mathrm{FSR2}} = 12{,}8$ V. Laske lähtöjännite U_2, kun $U_1 = 1$, 6, 12 tai 15 V.



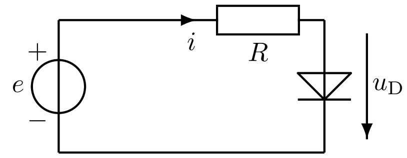
$$\Delta U_1 = \frac{U_{\mathrm{FSR1}}}{2^n} = \frac{16}{16} = 1\ \mathrm{V} \qquad \Delta U_2 = \frac{12{,}8}{128} = 0{,}1\ \mathrm{V} \qquad (260)$$

U_1/V	$MSB\ldots LSB$	$MSB\ldots LSB$	k	$U_2 = k\Delta U_2$/V
1	0001	000 0001	1	0,1
6	0110	001 0100	20	2,0
12	1100	101 0000	80	8,0
15	1111	101 0101	85	8,5

Kerroin k on 7-bittistä binäärikoodia vastaava 10-järjestelmän luku.

Toinen "koe":

6. Diodin jännite ilman signaalia, kun $e(t) = 10$ V (tasajännite), on $u_\mathrm{D} = U_\mathrm{Q} = 0{,}801727$ V. Laske diodin jännitteen maksimiarvo u_DMAX 10 mV:n tarkkuudella, kun $e(t) = (10 + 1{,}53 \sin \omega t)$ V (signaali mukana). Voit laskea joko r_d:n avulla (piensignaalianalyysi) tai iteroimalla. $R = 1000\ \Omega$, $nU_T = 50$ mV.



Tarkka tulos iteroimalla:

$$\sin \omega t = 0: \qquad -e + Ri + u_\mathrm{D} = 0 \tag{261}$$

$$-10 + 1000 I_\mathrm{S}(\mathrm{e}^{U_\mathrm{Q}/(nU_T)} - 1) + U_\mathrm{Q} = 0 \Rightarrow I_\mathrm{S} = 1 \text{ nA} \tag{262}$$

$$\sin \omega t = 1: \qquad -11{,}53 + 1000 \cdot 10^{-9}(\mathrm{e}^{u_\mathrm{DMAX}/(nU_T)} - 1) + u_\mathrm{DMAX} = 0 \tag{263}$$

$$u_\mathrm{DMAX} = 11{,}53 - 10^{-6}(\mathrm{e}^{20u_\mathrm{DMAX}} - 1) = \begin{cases} 10 \Leftarrow u_\mathrm{DMAX} = 0{,}7000 \\ 2{,}6 \Leftarrow u_\mathrm{DMAX} = 0{,}8000 \\ -12{,}6 \Leftarrow u_\mathrm{DMAX} = 0{,}8500 \\ 0{,}68 \Leftarrow u_\mathrm{DMAX} = 0{,}8100 \\ 0{,}8059 \Leftarrow u_\mathrm{DMAX} = 0{,}8094 \end{cases} \tag{264}$$

$$\Rightarrow u_\mathrm{DMAX} = 0{,}8094 \approx 0{,}81 \text{ V} \tag{265}$$

Hyvä likiarvo piensignaalianalyysilla:

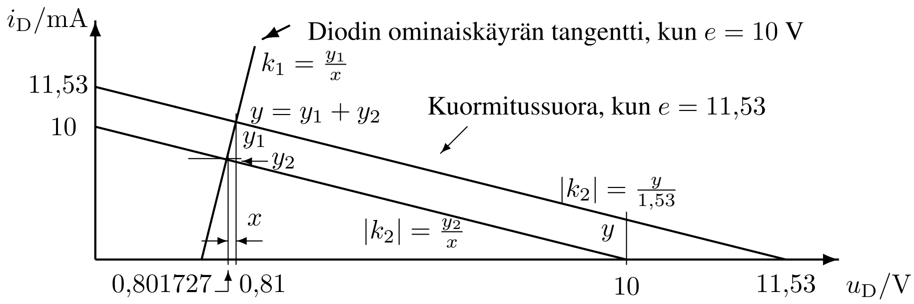
$$I = \frac{E - U_\mathrm{Q}}{R} = \frac{10 - 0{,}801727}{1000} = 9{,}198 \text{ mA } (= I_\mathrm{S}\mathrm{e}^{U_\mathrm{Q}/(nU_T)} - 1) \tag{266}$$

$$r_\mathrm{d} = \frac{nU_T}{I} = 5{,}4358\ \Omega \tag{267}$$

$$u_\mathrm{d} = \frac{r_\mathrm{d}}{R + r_\mathrm{d}} 1{,}53 \sin \omega t \Rightarrow u_\mathrm{dmax} \approx 8 \text{ mV} \tag{268}$$

$$u_\mathrm{DMAX} \approx \underbrace{U_\mathrm{Q}}_{802\,\mathrm{mV}} + u_\mathrm{dmax} \approx 0{,}81\mathrm{V} \tag{269}$$

Graafinen tulkinta piensignaalianalyysille (johtaa täsmälleen samaan lopputulokseen).



Diodin ominaiskäyrän tangentin kulmakerroin toimintapisteessä ($u_\mathrm{D} = 0{,}801727$ V) on $k_1 = \frac{1}{r_\mathrm{d}}$. Kuormitussuoran yhtälö ja kulmakerroin:

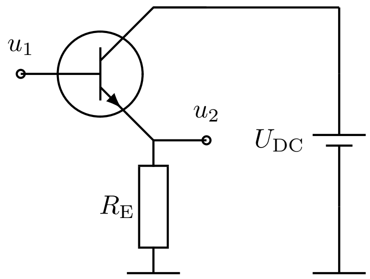
$$i_\mathrm{D}(t) = \frac{e(t) - u_\mathrm{D}}{R} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{R} \tag{270}$$

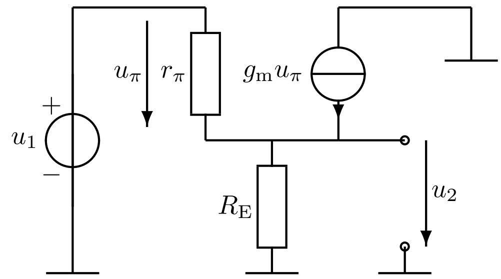
$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow 1{,}53\,|k_2| = k_1\,x + |k_2|\,x \tag{271}$$

$$\Rightarrow x = \frac{|k_2|}{k_1 + |k_2|} 1{,}53 = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{r_\mathrm{d}} + \frac{1}{R}} 1{,}53 = \frac{r_\mathrm{d}}{R + r_\mathrm{d}} 1{,}53 \tag{272}$$

$$u_\mathrm{DMAX} = 0{,}801727 + x \approx 0{,}81 \text{ V} \tag{273}$$

7. Kuvassa on yhteiskollektorikytketty transistorivahvistin, jota käytetään vahvistimien lähtöasteena. Laske oheisen piensignaalisijaiskytkennän avulla vahvistimen jännitevahvistus $\frac{u_2}{u_1}$. $R_\mathrm{E} = 100\ \Omega$, $r_\pi = 2{,}5\ \mathrm{k\Omega}$, $g_\mathrm{m} = 0{,}04$ S.





$$u_2 = R_\mathrm{E}\left(\frac{u_\pi}{r_\pi} + g_\mathrm{m} u_\pi\right) = R_\mathrm{E}\left(\frac{1}{r_\pi} + g_\mathrm{m}\right)\overbrace{u_\pi}^{u_1 - u_2} \tag{274}$$

$$u_2\left(1 + \frac{R_\mathrm{E}}{r_\pi} + g_\mathrm{m} R_\mathrm{E}\right) = \left(\frac{R_\mathrm{E}}{r_\pi} + g_\mathrm{m} R_\mathrm{E}\right) u_1 \tag{275}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{R_\mathrm{E}}{r_\pi} + g_\mathrm{m} R_\mathrm{E}}{1 + \frac{R_\mathrm{E}}{r_\pi} + g_\mathrm{m} R_\mathrm{E}} = \frac{1 + g_\mathrm{m} r_\pi}{1 + g_\mathrm{m} r_\pi + \frac{r_\pi}{R_\mathrm{E}}} = \frac{101}{126} = 0{,}802 \tag{276}$$

8. Kuvassa on Sallen–Key-tyyppinen suodatin. Impedansseista tiedetään, että $Z_1 = Z_2 = kZ_3 = kZ_4$. Laske siirtofunktio U_O/E suhdeluvun k funktiona. Muotoilin tehtävän niin, ettei kompleksilukujen kanssa tarvitse nyhrätä!

$$I_2 = I_4 \Rightarrow \frac{U - U_+}{Z_2} = \frac{U_+}{Z_4} \Rightarrow U = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_4}\right) U_+ \qquad \leftarrow U_+ = U_\mathrm{O} \tag{277}$$

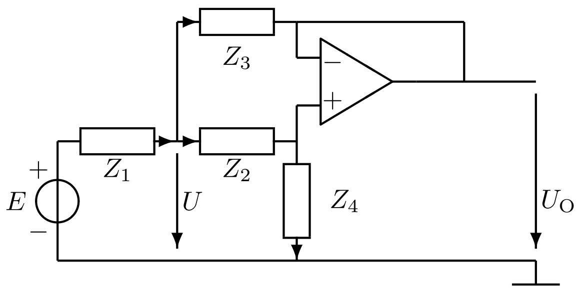
$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow \frac{E - U}{Z_1} = \frac{U - U_+}{Z_2} + \frac{U - U_\mathrm{O}}{Z_3} \tag{278}$$

$$\frac{E}{Z_1} = \frac{U}{Z_1} + \frac{U - U_+}{Z_2} + \frac{U - U_\mathrm{O}}{Z_3} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) U - \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) U_\mathrm{O} \tag{279}$$

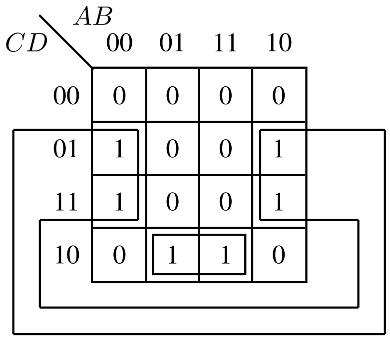
$$U_\mathrm{O} = \frac{E/Z_1}{\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)\underbrace{\left(1 + \frac{Z_2}{Z_4}\right)}_{1+k} - \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)} = \frac{E/Z_1}{\frac{1}{Z_1}(1 + k) + k\left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)} \tag{280}$$

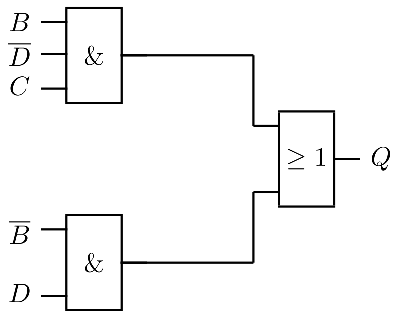
$$\frac{U_\mathrm{O}}{E} = \frac{1}{1 + k + k(1 + k)} = \frac{1}{(k + 1)^2} \tag{281}$$

Suhdeluku $k = \frac{Z_2}{Z_4} = \frac{Z_1}{Z_3}$ voi olla esimerkiksi $\mathrm{j}\omega CR$ (alipäästösuodatin). Yleisesti tietysti $Z_1 \neq Z_2$ ja $Z_3 \neq Z_4$.



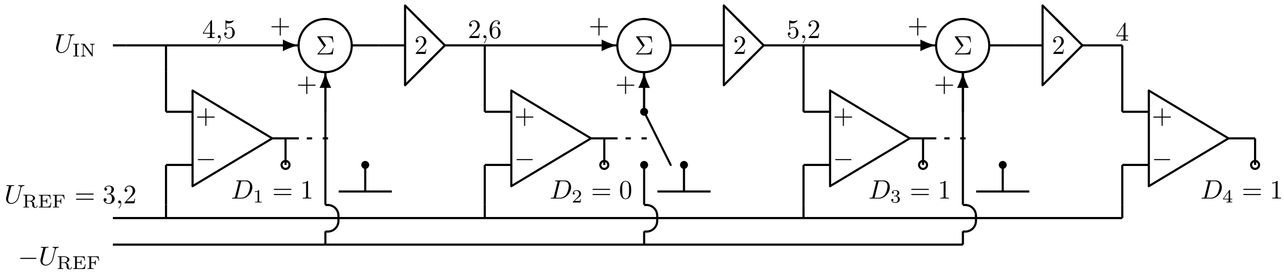
9. Suunnittele Karnaugh'n kartan avulla piiri, jonka lähtö on $Q = 1$, kun tulot A, B, C ja D muodostavat kokonaisluvun 1,3,6,9,11 tai 14.





$$Q = \overline{B}D + BC\overline{D} \tag{282}$$

10. Kuvan A/D-muuntimelle tuodaan jännite $U_{\mathrm{IN}} = 4{,}5$ V. Mitä kymmenjärjestelmän lukua vastaa muunnoksen tuloksena saatava digitaalikoodi. $U_{\mathrm{REF}} = 3{,}2$ V. Komparaattori ohjaa kytkintä. Kun $D_i = 0$, on kytkin käännettynä maahan. Kun $D_i = 1$, viedään summaimelle kytkimen kautta U_{REF} miinusmerkkisenä.



$$U_{\mathrm{IN}} > U_{\mathrm{REF}} \Rightarrow D_1 = 1 \tag{283}$$

$$U_2 = 2(U_{\mathrm{IN}} - U_{\mathrm{REF}}) = 2{,}6 < U_{\mathrm{REF}} \Rightarrow D_2 = 0 \tag{284}$$

$$U_3 = 2(U_2 + 0) = 5{,}2 > U_{\mathrm{REF}} \Rightarrow D_3 = 1 \tag{285}$$

$$U_4 = 2(U_3 - U_{\mathrm{REF}}) = 4 > U_{\mathrm{REF}} \Rightarrow D_4 = 1 \tag{286}$$

$$1011_2 = 11_{10} \tag{287}$$

Eniten merkitsevä bitti tutkitaan ensin ja "jakojäännös" viedään sitten seuraavalle asteelle, jne. $U_{\mathrm{FSR}} = 2U_{\mathrm{REF}}$, $\Delta U = 0{,}4$ V.

Prujujen viimeinen sivu (vain yksi prujuerä).