

# Matemaattinen geodesia

## Maa-6.3230



(Galaksijoukko Abell 2218, etäisyys 2 miljardia valovuotta, toimii gravitaatiolinssina. Aika-avaruuden geometria joukon sisällä on epäeuklidinen)

Martin Vermeer

22. huhtikuuta 2010



# Kurssiesite

**Laajuus** 3 op

**Opetusjakso** III

**Osaamistavoitteet** Kurssin suorittamisen jälkeen, opiskelija

- Osaa suorittaa yksinkertaisia laskutoimituksia pallon pinnalla ja ymmärtää vertausellipsoidin geometriaa
- Osaa ratkaistaa, Matlab<sup>TM</sup>:in kaltaisten työkalujen avulla, geodeettinen pää- ja käänteistehtävä ym. vertausellipsoidilla
- Hallitsee globaalisten ja paikallisten vertausjärjestelmien perusteet ja osaa suorittaa muunnoksia
- Hallitsee Gaußin ja Riemannin pintateorian alkeet ja osaa derivoida yksinkertaisten pintojen metrasta tensoria, Christoffelin symboleja ja kaarevuustensoria
- Hallitsee karttaprojektioiden, etenkin konformisten, perusmatematiikkaa ja mittakaavan käyttäytymistä sekä osaa laskea isometristä leveysastetta.

**Sisältö** Pallotrigonometria, geodeettiset koordinaattilaskennat ellipsoidisessa ja suorakulmaisessa avaruuskoordinaatistossa, tähtitieteelliset koordinaatit, koordinaattijärjestelmien muunnoslaskennat, satelliittiradat ja laskennat, Gaußin ja Riemannin pintateoriat, Karttaprojektioiden laskennat.

**Esitiedot**

**Korvaavuudet** Korvaa opintojakson Maa-6.230.

**Kohderyhmä**

**Suoritustavat** Kokonaissuoritus koostuu tentistä, harjoitustöistä ja laskuharjoituksista.

**Työmäärä toteutustavoittain**

- Luennot  $6 \times 2 \text{ t} = 12 \text{ t}$
- Materiaalin itsenäinen opiskelu  $12 \text{ t}$
- Harjoitustyöt  $2 \times 4 \text{ t} = 8 \text{ t}$  (itsenäinen työskentely)
- Laskuharjoitukset kotityönä  $16$ , joista suoritettava  $12 \times 4 \text{ t} = 48 \text{ t}$  (itsenäinen työskentely)
- Yhteensä  $80 \text{ t}$

**Arvostelu** Tentin arvosana on kokonaissuorituksen arvosana , 1-5

**Oppimateriaalit** Luentomoniste. Taustamateriaalina Hirvonen: Matemaattinen geodesia; Torge: Geodesy.

**Opetuskieli** Suomi

**Kurssin henkilökunta ja yhteystiedot** Martin Vermeer, huone M309, nimi@tkk.fi

**Vastaanottoajat** Keskiviikkoisin klo 12:15

**CEFR-taso**

**Lisätietoja**



# Sisältö

<b>1</b>	<b>Pallotrigonometria</b>	<b>1</b>
1.1	Johdanto . . . . .	1
1.2	Palloylijäämä . . . . .	1
1.3	Kolmion pinta-ala pallolla . . . . .	2
1.4	Suorakulmainen pallokolmio . . . . .	3
1.5	Yleinen pallokolmio . . . . .	3
1.6	Kaavojen johtaminen avaruusvektoreilla . . . . .	5
1.7	Polarisaatio . . . . .	6
1.8	Pallokolmion ratkaisu additamenttimenetelmällä . . . . .	7
1.9	Pallokolmion ratkaisu LEGENDREN menetelmällä . . . . .	8
1.10	Geodeettinen päätehtävä pallolla . . . . .	8
1.11	Geodeettinen käänteistehtävä pallolla . . . . .	8
1.12	Puolikulman kosinikaava . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Vertausellipsoidin geometria</b>	<b>11</b>
2.1	Johdanto . . . . .	11
2.2	Geodeettinen viiva differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisuna . . . . .	11
2.3	Eräs invariantti . . . . .	12
2.4	Geodeettinen päätehtävä . . . . .	13
2.5	Geodeettinen käänteistehtävä . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Vertausellipsoidin koordinaatit</b>	<b>15</b>
3.1	Pallon ja ellipsoidin esitystavat . . . . .	15
3.2	Eri leveysastetyypit . . . . .	15
3.3	Litistykseen mitat . . . . .	16
3.4	Eri leveysastetyyppien väliset suhteet . . . . .	16
3.5	Koordinaatit meridiaaniellipsissa . . . . .	17
3.6	Kolmiulotteiset suorakulmaiset koordinaatit vertausellipsoidilla . . . . .	17
3.7	Maantieteellisten koordinaattien laskeminen suorakulmaisilta . . . . .	18
3.8	Meridiaanikaaren pituus . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Vertausjärjestelmät</b>	<b>21</b>
4.1	GRS80 järjestelmä ja geometriset parametrit . . . . .	21
4.2	Gravimetriset parametrit . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Rotaatiomatriisien käyttö</b>	<b>23</b>
5.1	Yleistä . . . . .	23
5.2	Matriisien ketjutus kolmessa ulottuvuudessa . . . . .	24
5.3	Ortogonaalit matriisit . . . . .	24
5.4	Toposentriset järjestelmät . . . . .	26
5.5	Geosentrisestä toposentriseen ja takaisin . . . . .	26
5.6	Geodeettinen pää- ja käänteistehtävä rotaatiomatriiseilla . . . . .	28
5.6.1	Geodeettinen päätehtävä . . . . .	28
5.6.2	Geodeettinen käänteistehtävä . . . . .	28
5.6.3	Vertailu ellipsoidipintaratkaisun kanssa . . . . .	29

<b>6</b>	<b>Koordinaattijärjestelmät ja muunnokset</b>	<b>31</b>
6.1	Geosentriset terrestriiset järjestelmät . . . . .	31
6.2	Konventionaalinen terrestrinen järjestelmä . . . . .	31
6.3	Hetkellinen terrestrinen järjestelmä . . . . .	31
6.4	Geosentrinen inertiaalinen järjestelmä . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Taivaalliset koordinaattijärjestelmät</b>	<b>35</b>
7.1	Tähtiaika . . . . .	35
7.2	Taivaanpallon trigonometria . . . . .	36
7.3	Rotaatiomatriisien käyttö . . . . .	37
7.4	Satelliittien radoista . . . . .	38
7.5	Tietyn leveysasteen ylitys inertiaalisessa järjestelmässä . . . . .	39
7.6	Satelliitin toposentriset koordinaatit . . . . .	39
7.7	Tietyn leveysasteen ylitys terrestrisessä järjestelmässä . . . . .	40
7.8	Radan määrittäminen havainnoista . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Gaußin pintateoria</b>	<b>45</b>
8.1	Avaruuskäyrä . . . . .	45
8.2	Ensimmäinen perusmuoto (metriikka) . . . . .	46
8.3	Toinen perusmuoto . . . . .	47
8.4	Kolmas perusmuoto . . . . .	49
8.5	Käyrä pinnan sisällä . . . . .	51
8.6	Geodeettinen viiva . . . . .	53
<b>9</b>	<b>Riemannin pintateoria</b>	<b>57</b>
9.1	Mikä on tensori? . . . . .	57
9.2	Metrisen tensorin ominaisuudet . . . . .	61
9.3	Metrisen käänteistensorin ominaisuudet . . . . .	63
9.3.1	Tensorin indeksien nostaminen tai laskeminen . . . . .	63
9.3.2	Tensorin ominaisarvot ja -vektorit . . . . .	63
9.3.3	Tensorin kuvaaja . . . . .	63
9.4	CHRISTOFFELIN symbolit . . . . .	64
9.5	Geodeettinen viiva uudelleen . . . . .	66
9.6	Kaarevuustensori . . . . .	66
9.7	Gaußin kaarevuus ja palloylityksiä . . . . .	69
9.8	Kaarevuus kvasi-euklidisessa geometriassa . . . . .	71
<b>10</b>	<b>Karttaprojektiot</b>	<b>73</b>
10.1	Karttaprojektiot ja mittakaava . . . . .	73
10.1.1	Maan pinnalla . . . . .	73
10.1.2	Karttatasossa . . . . .	73
10.1.3	Mittakaava . . . . .	74
10.1.4	Tissot-indicatrix . . . . .	76
10.2	Lambert-projektio (LCC) . . . . .	77
10.3	Isometrisestä leveysasteesta . . . . .	79
10.4	Mercator-projektio . . . . .	80
10.5	Stereograafinen projektio . . . . .	81
10.6	Gauß-Krüger projektio . . . . .	83
10.7	Maanpinnan kaarevuus ja mittakaava . . . . .	86
<b>A</b>	<b>Isometrinen leveysaste ellipsoidille</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Hyödylliset yhtälöt pääkaarevuussäteitten välillä</b>	<b>91</b>
<b>C</b>	<b>Christoffelin symbolit metriikasta</b>	<b>93</b>

**D Riemannin tensori Christoffelin symboleista**

**95**



# 1 Pallotrigonometria

## 1.1 Johdanto

Pallogeometrian kaavat ovat geodesiassa erittäin käyttökelpoisia. Maan pinta, joka ensimmäisessä approksimaatiossa on taso, on toisessa approksimaatiossa (siis pienissä, muttei *niin* pienissä alueissa) pallopinta. Jopa koko maapallon tapauksessa poikkeama pallon muodosta on vain 0.3%.

Tähtitaivas taas voidaan käsitellä tarkkana pallopintana, jonka säde on epämääräinen; käytännön laskennassa asetetaan usein  $R = 1$ .

## 1.2 Palloylijäämä

Ks. kuva 1.1. Oletetaan, että pallon säde on 1. Pallon “etupuolisko” on puolipallo, jonka pinta-ala on  $2\pi$ . Kolmio muodostuu kolmen isoympyrän väliin. Samat isoympyrät muodostavat pallon takapinnalle samankokoisen ja -muotoisen “antipodikolmion”.

Kun koko puolipallon pinta-ala on  $2\pi$ , on kahden suurympyrän muotoisen “appelsiinipalasen” pinta-ala  $\frac{\alpha}{\pi} \cdot 2\pi$ , jos  $\alpha$  on suurympyröiden välinen kulma. Saadaan

$$A_1 + A_2 = 2\alpha$$

$$A_1 + A_3 = 2\beta$$

$$A_1 + A_4 = 2\gamma$$

ja

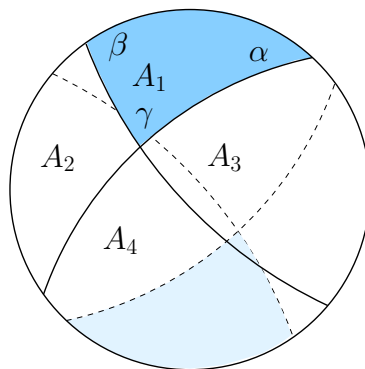
$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2\pi.$$

Ynnäämällä ensimmäiset kolme yhtälöä saadaan

$$2A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

eli

$$A_1 = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon,$$



Kuva 1.1: Pallokolmiot pallopuoliskolla. Pallon taustapinta on piirretty hämäräksi “antipodikolmioineen”

## 1 Pallotrigonometria

missä  $\varepsilon$  kutsutaan *palloylijäämäksi* (En. *spherical excess*).

Jos pallon säde ei ole 1 vain  $R$ , saadaan

$$A = \varepsilon R^2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{A}{R^2}.$$

Tässä  $\varepsilon$  ilmaistaan *radiaaneina*. Ellei  $\varepsilon$  ole radiaaneissa, voidaan kirjoittaa

$$\varepsilon [\text{yksikkö}] = \frac{\rho_{\text{yksikkö}} A}{R^2},$$

missä  $\rho_{\text{yksikkö}}$  on ko. yksikön muunnostekijä, esim. asteiden tapauksessa 57.29577951308232087721 tai goonien tapauksessa 63.66197723675813430801.

Kuten nähdään, on palloylijäämä kääntäen verrannollinen suureeseen  $R^2$ , eli *suoraan verrannollinen pallon kokonaiskaarevuuteen*  $R^{-2}$ . Samalla se on verrannollinen kolmion pinta-alaan.

Tämä on yleisemmän lauseen erikoistapaus:

Rinnakkaisesti ympäri pinnan suljettua reunaa kuljetun vektorin suuntasulkuvirhe on sama kuin kokonaiskaarevuuden integraali pinnan yli.

Kaavana:

$$\varepsilon = \int_A K d\sigma,$$

missä  $\sigma$  on pinta-integraation muuttaja ja  $K$  K.F. GAUSSIN mukainen pinnan kokonaiskaarevuus, joka siis voi vaihdella paikan mukaan. Esimerkiksi ellipsoidin pinnalla

$$K = \frac{1}{MN},$$

missä  $M$  on meridiaanin kaarevuus (etelä-pohjoissuunnassa) ja  $N$  ns. poikittaiskaarevuus itä-länsisuunnassa. Molemmat riippuvat leveysasteesta  $\varphi$ . Pienehköllä alueella ellipsoidipinnan sisäinen geometria ei merkittävästi poikkea pallopinnasta, jonka säde on  $R = \sqrt{MN}$ .

Mikäli kolmio pallon pinnalla on *pieni* maan säteen verrattuna, on myös palloylijäämä pieni. Limiitissä on  $\varepsilon \rightarrow 0$  ja  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  eksaktisti. Sanotaan, että tasopinta (tai hyvin pieni pallopinnan osa) muodostaa *euklidinen avaruus*, kun pallopinta on *ei-euklidinen*.

### 1.3 Kolmion pinta-ala pallolla

Mikäli kolmio ei ole ylen suuri – siis vain sen kokoinen kuin geodeettiset kolmiomittauskolmiot yleensä ovat, korkeintaan n. 50 km –, voidaan sen pinta-ala laskea tasokolmion kaavalla:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

missä  $h_a$  on kolmion korkeus  $a$ -suvua kohtaan, eli kulmapisteen  $A$  suora etäisyys sivusta  $a$ .

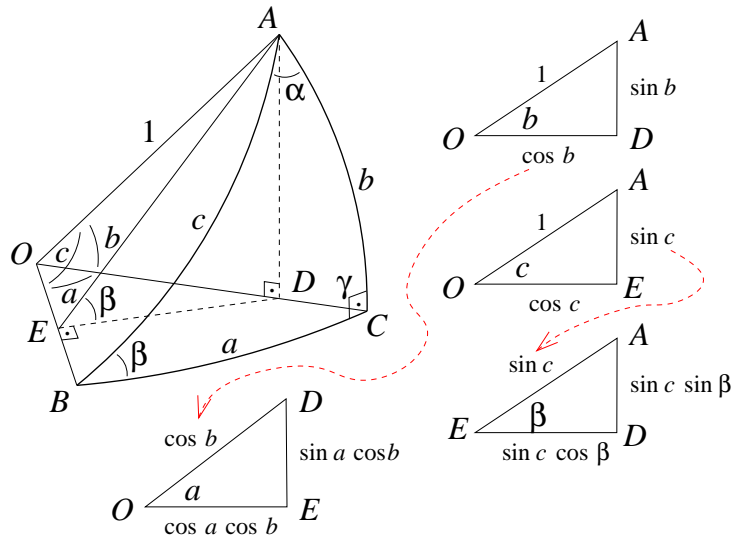
Koska sinikaavan mukaan  $b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ , seuraa myös

$$A = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}.$$

Ainakin palloylijäämän laskentaan nämä likikaavat riittävät hyvin:

$$\varepsilon = \frac{A}{R^2},$$

missä myös likimääräinen  $R$ -arvo, esim.  $R \approx a = 6378137$  m, on täysin riittävä.



Kuva 1.2: Suorakulmainen pallokolmio. Osakolmiot on nostettu näkyviin

## 1.4 Suorakulmainen pallokolmio

Tämä tapaus on kuvattu kuvassa 1.2. Monet yksinkertaiset kaavat suraavat suoraan kuvasta ja erikseen piirretyistä tasokolmioista:

$$\begin{aligned}
 EO &= \cos c = \cos a \cos b \\
 DE &= \sin c \cos \beta = \sin a \cos b \\
 AD &= \sin c \sin \beta = \sin b
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Vaihtamalla keskenään  $a$ :n ja  $b$ :n (ja siis  $\alpha$ :n ja  $\beta$ :n) roolit, saadaan lisäksi

$$\begin{aligned}
 \sin c \cos \alpha &= \sin b \cos a \\
 \sin c \sin \alpha &= \sin a
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

jonka ensimmäinen antaa

$$\cos \alpha = \cos a \frac{\sin b}{\sin c} = \cos a \sin \beta,$$

Ryhmän (1.1) viimeisen kaavan mukaan.

Jakamalla ryhmän (1.2) ensimmäinen toisella saadaan

$$\cot \alpha = \cot a \sin b$$

ja ryhmän (1.1) toinen kolmannella vastaavasti

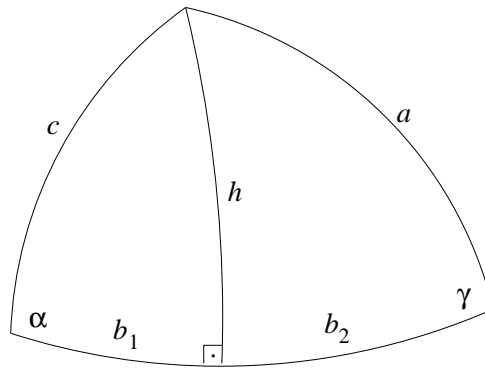
$$\cot \beta = \cot b \sin a.$$

## 1.5 Yleinen pallokolmio

Yleisen pallokolmion kaavat saadaan jakamalla kolmio kahteen suorakulmaiseen, ks. kuva 1.3. Tässä kolmas sivu on  $b = b_1 + b_2$ .

Kun sovelletaan osakolmioihin edellä johdetut kaavat, saadaan:

$$\begin{aligned}
 \cos a &= \cos h \cos b_2, \\
 \sin a \cos \gamma &= \cos h \sin b_2, \\
 \sin a \sin \gamma &= \sin h,
 \end{aligned}$$



Kuva 1.3: Yleinen pallokolmio

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos h \cos b_1, \\ \sin c \cos \alpha &= \cos h \sin b_1, \\ \sin c \sin \alpha &= \sin h.\end{aligned}$$

Sijoittamalla

$$\begin{aligned}\sin b_1 &= \sin(b - b_2) = \sin b \cos b_2 - \cos b \sin b_2, \\ \cos b_1 &= \cos(b - b_2) = \cos b \cos b_2 + \sin b \sin b_2\end{aligned}$$

saadaan

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos h (\cos b \cos b_2 + \sin b \sin b_2) = \\ &= \cos b (\cos h \cos b_2) + \sin b (\cos h \sin b_2) = \\ &= \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma,\end{aligned}\tag{1.3}$$

ns. *pallotrigonometrian kosinikaava*, ja

$$\begin{aligned}\sin c \cos \alpha &= \cos h (\sin b \cos b_2 - \cos b \sin b_2) = \\ &= \sin b (\cos h \cos b_2) - \cos b (\cos h \sin b_2) = \\ &= \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos \gamma.\end{aligned}$$

Kahdesta “sin  $h$ ” -kaavasta saadaan

$$\sin c \sin \alpha = \sin a \sin \gamma,$$

eli yleisemmin

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma},\tag{1.4}$$

ns. *pallotrigonometrian sinikaava*.

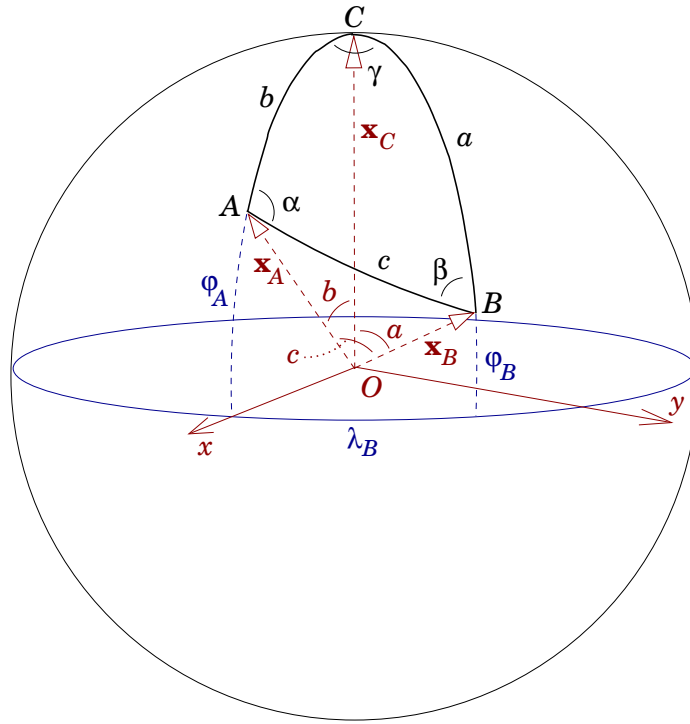
Vertailun vuoksi tasokolmion vastaavat kaavat:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

ja

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Ainakin sinikaavan tapauksessa on selvä, että pienen kolmion limiitissä  $\sin a \rightarrow a$  jne. eli pallosinikaava muuttuu tasokolmion sinikaavaksi. Kosinikaavan tapauksessa tämä ei ole heti selvä.

Kuva 1.4: Pallokolmio  $ABC$ , cosini- ja sinikaavojen johtamiseksi avaruusvektorien avulla

## 1.6 Kaavojen johtaminen avaruusvektoreilla

Jos *pallolla* tutkitaan kolmio, joka koostuu kahdesta pisteestä  $A$  ( $\varphi_A = \frac{\pi}{2} - b, \lambda_A = 0$ ) ja  $B = (\varphi_B = \frac{\pi}{2} - a, \lambda_B = \gamma)$  ja *napa*  $C = (\varphi_C = \frac{\pi}{2}, \lambda_C = \text{mielivaltainen})$ , ks. kuva 1.4, voidaan kirjoittaa kaksi kolmiulotteista vektoria:

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_A \\ 0 \\ \sin \varphi_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_B \cos \lambda_B \\ \cos \varphi_B \sin \lambda_B \\ \sin \varphi_B \end{bmatrix}.$$

Vektorien *pistetulo* on

$$\begin{aligned} \cos c = \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_B &= \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \lambda_B + \sin \varphi_A \sin \varphi_B = \\ &= \sin b \sin a \cos \gamma + \cos b \cos a, \end{aligned}$$

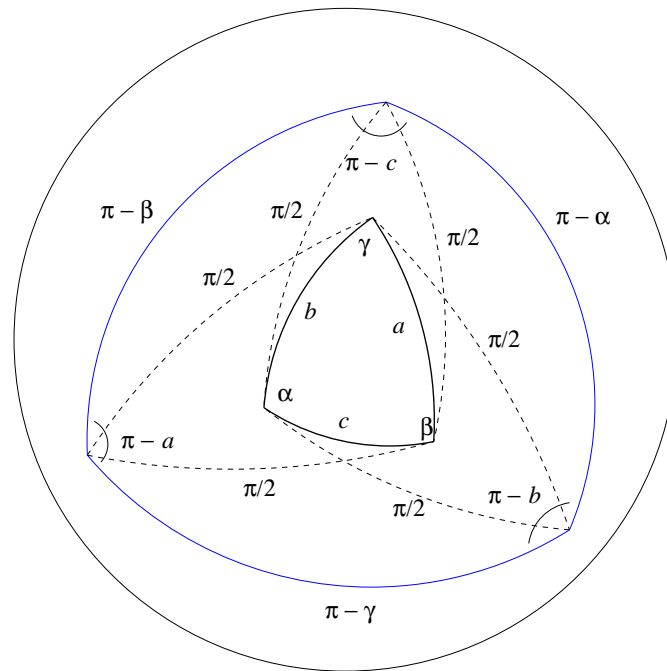
*kosinisääntö* pallokolmiolle.

Vektorien *ristitulo* on

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A \times \mathbf{x}_B &= \begin{bmatrix} -\sin \varphi_A \cos \varphi_B \sin \lambda_B \\ \sin \varphi_A \cos \varphi_B \cos \lambda_B - \cos \varphi_A \sin \varphi_B \\ \cos \varphi_A \cos \varphi_B \sin \lambda_B \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\cos a \sin b \sin \gamma \\ \cos a \sin b \cos \gamma - \sin a \cos b \\ \sin b \sin a \sin \gamma \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kun kolmas vektori on

$$\mathbf{x}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$



Kuva 1.5: Pallokolmion polarisaatio

saadaan kolmen vektorin sisältämän parallelepipedumin *tilavuus* (eli kaksi kertaa tetraedrin  $ABCO$  tilavuutta) seuraavasti:

$$\text{Vol} \{ \mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C \} = (\mathbf{x}_A \times \mathbf{x}_B) \cdot \mathbf{x}_C = \sin b \sin a \sin \gamma.$$

Kuitenkaan kolmen vektorin sisältämä tilavuus ei riipu vektorien järjestyksestä, joten myös

$$\text{Vol} \{ \mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C \} = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin a \sin c \sin \beta.$$

Jakamalla saa

$$\begin{aligned} \sin a \sin \gamma &= \sin c \sin \alpha \\ \sin b \sin \gamma &= \sin c \sin \beta \end{aligned}$$

eli

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma},$$

pallokolmion *sinisääntö*.

## 1.7 Polarisaatio

Jokaiselle kolmion kulmalle voidaan määritellä ”ekvaattori” eli suurympyrä, jonka yhtenä ”napana” on se kulmapiste. Jos näin tehdään, saadaan kolme ”ekvaattoria”, jotka itsekin muodostuvat kolmion. Tätä menetelmää kutsutaan kolmion *polarisaatioksi*.

Koska kahden kulmapisteen välinen kulmaetäisyys pallon pinnalla on sivun pituus, on kahden sellaisen suurympyrän tasojen välinen kulma sama kuin tämä pituus. Ja ”polarisaatiokolmion” kulma on  $180^\circ$  minus tätä.

Polarisaatiomenetelmä on *symmetrinen*: alkuperäinen kolmio on myös polarisaatiokolmion polarisaatio. Polarisaatiokolmion kahden sivun leikkauspiste on  $90^\circ$  etäisyydellä molemmista ”napapisteestä” eli alkuperäisen kolmion kulmista, ja niiden välinen sivu on siis leikkauspisteen ”ekvaattori”.

Symmetrian johdosta myös polarisaatiokolmion sivun pituus on taas  $180^\circ$  minus alkuperäisen kolmion vastaava kulma.

Mielivaltaiselle kulmalle  $\alpha$  pätee:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha\end{aligned}$$

Siksi saadaan pallotrigonometrian kosinikaavasta (1.3) seuraava *polarisoitu versio*:

$$-\cos \gamma = (-\cos \beta)(-\cos \alpha) + \sin \beta \sin \alpha (-\cos c)$$

eli

$$\cos \gamma = -\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos c,$$

kaava, jolla voi laskea kulma jos kaksi muuta kulmaa ja niiden välinen sivu on annettu.

## 1.8 Pallokolmion ratkaisu additamenttimenetelmällä

Additamenttimenetelmässä redukoidaan pallokolmio tasokolmioksi muuttamalla sivujen pituudet. Yleensä on annettu kaikki kolmion kulmat ja yksi sivu, ja tehtävänä on laskea muut sivut.

Koska sivut on pieniä maan säteen verrattuna, voidaan kirjoittaa (sarjakehitelmä):

$$\sin \psi = \psi - \frac{1}{6}\psi^3 + \dots = \frac{s}{r} \left(1 - \frac{s^2}{6r^2}\right).$$

Nyt pallosinikaava on ( $s = a, b, c$ ):

$$\frac{a(1 - \partial a)}{\sin \alpha} = \frac{b(1 - \partial b)}{\sin \beta} = \frac{c(1 - \partial c)}{\sin \gamma},$$

jossa  $\partial s = \frac{s^2}{6r^2}$ :  $\partial a = \frac{a^2}{6r^2}$ ,  $\partial b = \frac{b^2}{6r^2}$  ja  $\partial c = \frac{c^2}{6r^2}$ .

Menetelmä toimii nyt näin, että

1. Tunnestusta sivusta vähennetään sen additamentti  $\partial s$ ;
2. Muut sivut lasketaan käyttämällä tasokolmion sinikaava ja tunnetut kulma-arvot;
3. Laskettuihin sivuihin lisätään *niiden* additamentit.

Additamentit lasketaan parhaista käytettävissä olevista likiarvoista; jos ne on alunperin heikkoja, iteroidaan.

Additamenttikorjaus

$$s' = s(1 - \partial s)$$

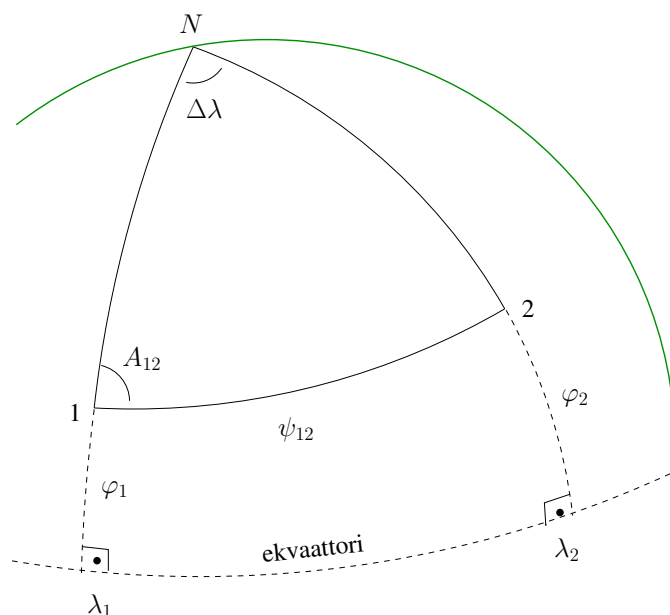
voidaan muuttaa kerto- ja vähennyslaskun operaatioiden yhdistelmästä *yksinkertaiseksi vähennyslaskuksi* ottamalla logaritmi:

$$\ln s' = \ln s + \ln(1 - \partial s) = \ln s + (0 - \partial s) = \ln s - \partial s,$$

eli kymmenlogaritmeilla

$${}^{10}\log s' = {}^{10}\log s - M \cdot \partial s,$$

missä  $M = {}^{10}\log e = 0.43429448$ . Logaritmitaulukkojen aikakaudella tämä helpotti olennaisesti käytännön laskentatyöt.

Kuva 1.6: Kolmio  $12N$  maapallolla.  $N$  on pohjoisnapa

## 1.9 Pallokolmion ratkaisu Legendren menetelmällä

LEGENDREN menetelmässä tehdään reduktio pallokolmiosta tasokolmioon muuttamalla *kulmat*. Kun taas kaikki kulmat ja yksi sivu ovat annettuna, sovelletaan seuraava kaava:

$$\frac{a}{\sin(\alpha - \varepsilon/3)} = \frac{b}{\sin(\beta - \varepsilon/3)} = \frac{c}{\sin(\gamma - \varepsilon/3)},$$

eli jokaisesta kulmasta vähennetään *palloylijäämän*  $\varepsilon$  kolmasosa.

Kuitenkin on tärkeä ymmärtää, että jatkolaskennat on aina suoritettava kuitenkin *alkuperäisillä kulmilla*  $\alpha, \beta, \gamma$ ! Palloylijäämän pois ottaminen palvelee *vain* kolmion tuntemattomien sivujen laskentaa.

Nykyisin nämä approksimattiviset menetelmät (additamentti- ja Legendre-menetelmä) ei enää käytetä. Tietokoneella on helppoa laskea suoraan pallosinikaavan avulla.

## 1.10 Geodeettinen päätehtävä pallolla

Pallotrigonometrian kosini- ja sinikaavat, sopivasti soveltuina:

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \psi_{12} + \cos \varphi_1 \sin \psi_{12} \cos A_{12},$$

ja

$$\frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin \psi_{12}} = \frac{\sin A_{12}}{\cos \varphi_2} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \arcsin\left(\frac{\sin \psi_{12} \sin A_{12}}{\cos \varphi_2}\right).$$

## 1.11 Geodeettinen käänteistehtävä pallolla

Pallotrigonometrian kosini- ja sinikaava, sopivasti soveltuina:

$$\cos s\psi_{12} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1), \quad (1.5)$$

$$\sin A_{12} = \cos \varphi_2 \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin \psi_{12}}. \quad (1.6)$$

## 1.12 Puolikulman kosinikaava

Ylläoleva pallokolmion kosinikaava (1.3) on numeerisesti huonosti käyttäytyvä, jos kolmio on hyvin pieni pallon verrattuna, ts. jos  $a, b, c$  ovat pieniä. Esimerkiksi kolmio Helsinki-Tampere-Turku on hyvin pieni koko maapallon verrattuna, noin  $200 \text{ km}/6378 \text{ km} \sim 0.03$ . Silloin  $\cos b \cos c \sim 0.999$ , mutta  $\sin b \sin c \sim 0.0009$ ! Ynnätään kaksi termiä joista toinen on noin 1 ja toinen noin tuhat kertaa pienempää. Näin menetetään laskentatarkkuutta.

Ratkaisuna huomautetaan ensin, että

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

ja

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c = \cos (b - c) = 1 - 2 \sin^2 \frac{b - c}{2};$$

joidenkin järjestyksen jälkeen saadaan pieneillekin kolmioille hyvin käyttäytyvä **pallokolmion puolikulmakosinikaava**<sup>1</sup>:

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \frac{b - c}{2} + \sin b \sin c \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

---

<sup>1</sup>...joka, yllätys yllätys, sisältää ainostaan sinejä!



## 2 Vertausellipsoidin geometria

### 2.1 Johdanto

Vertausellipsoidi on jo aika tarkka kuvaus maan todellisesta muodosta. Keskimerenpinnan poikkeamat GRS80-vertausellipsoidista ovat luokkaa  $\pm 100$  m.

Valitettavasti vertausellipsoidin geometria ei ole niin yksinkertainen kuin pallon. Kuitenkin rotaatiosymmetria tuottaa ainakin yksi kaunis invariantti.

Geodeettisen pää- ja käänteistehtävän ratkaisuksi on perinteisesti tarjoutunut monitermisiä sarjakehitelmiä, joiden kertoimet ovat itsekin monitermisiä. Tässä mieluummin tarjotaan numeerisia menetelmiä, jotka ovat käsitteellisesti selkeämpiä ja helpommin implementoida virheettömästi.

### 2.2 Geodeettinen viiva differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisuna

Voimme kirjoittaa pienessä suorakulmaisessa kolmiossa ( $dy, dx$  metrinen itä- ja pohjoissiirtymä, ks. kuva 2.1):

$$\begin{aligned} dx &= M(\varphi) d\varphi = \cos A ds, \\ dy &= p(\varphi) d\lambda = \sin A ds \text{ ja} \\ dA &= \sin \varphi d\lambda, \end{aligned}$$

missä  $p = N \cos \varphi$  on etäisyys rotaatioakselista ja  $M$  ja  $N$  ovat meridiaanin kaarevuus ja poikittaiskaarevuus.

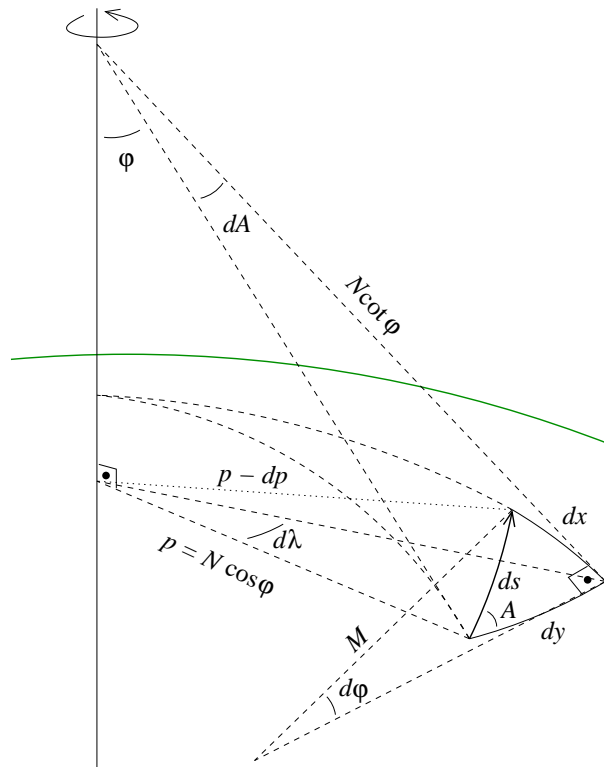
Yhtälöryhmä normalisoituna:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{\cos A}{M(\varphi)}, \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\sin A}{p(\varphi)}, \\ \frac{dA}{ds} &= \sin \varphi \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin \varphi \sin A}{p(\varphi)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ryhmä 2.1 on yleisemmin voimassa kuin vain pyörähdysellipsoidille; se pätee kaikille pyörähdyskappaleille. Pyörähdyssymmetrisellä kappaleella on  $p(\varphi) = N(\varphi) \cos \varphi$ , siis

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\sin A}{N(\varphi) \cos \varphi}, \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{\tan \varphi \sin A}{N(\varphi)}. \end{aligned}$$

Jos alkuehtoina on annettuna  $\varphi_1, \lambda_1, A_{12}$ , voidaan saada geodeettinen viiva  $\varphi(s), \lambda(s), A(s)$  kaaripituuden  $s$  mukaan parametrisoituna ratkaisuna. Ratkaisun numeerinen laskeminen MatLab-ohjelmistolla on myös suhteellisen helppoa ODE-rutiinien (“Ordinary Differential Equation”) ansiosta.



Kuva 2.1: Geodeettisen viivan integroinnin geometria

Muuntaminen suorakulmaiseen muotoon on helppoa:

$$\begin{aligned} X(s) &= N(\varphi(s)) \cos \varphi(s) \cos \lambda(s), \\ Y(s) &= N(\varphi(s)) \cos \varphi(s) \sin \lambda(s), \\ Z(s) &= \frac{b^2}{a^2} N(\varphi) \sin \varphi(s). \end{aligned}$$

### 2.3 Eräs invariantti

Tutkitaan lähemmin suure  $p(\varphi) = N(\varphi) \cos \varphi$ , pisteen etäisyys pyörähdyksakselista. Lasketaan  $s$ -derivaatta:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{ds} = -\sin \varphi \cos A.$$

Nyt kaavan 2.1

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin \varphi \sin A}{p}$$

kanssa saadaan jakamalla

$$\frac{dp}{dA} = -\frac{\cos A}{\sin A} p.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \frac{d(p \sin A)}{dA} &= \frac{dp}{dA} \sin A + p \cos A = \\ &= -\frac{\cos A}{\sin A} p \cdot \sin A + p \cos A = \\ &= p(-\cos A + \cos A) = 0. \end{aligned}$$

**Tulos:**

*lauseke  $p \sin A$  on invariantti.*<sup>1</sup>

Tämä pätee *kaikille pyörähdyssymmetrisille kappaleille*, siis myös pyörähdysellipsoidille – jossa tätä kutsutaan CLAIRAUT:n kaavaksi –, ja tietysti tasossakin. Tätä invarianttia voidaan käyttää  $A$ -differentiaaliyhtälön eliminoimiseksi ryhmästä 2.1. Tulos on

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos A(\varphi)}{M(\varphi)}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin A(\varphi)}{p(\varphi)}, \quad (2.3)$$

joissa  $A(\varphi)$  lasketaan invarianttikaavasta

$$\sin A(\varphi) = \sin A_{12} \frac{p(\varphi_1)}{p(\varphi)}. \quad (2.4)$$

Kappaleen muotoa määritetään antamalla funktio  $p(\varphi)$ .

## 2.4 Geodeettinen päätehtävä

Geodeettisen päätehtävän ratkaiseminen on nyt yksinkertaisesti myös annetun kaarenpituuden  $s_{12}$  sijoittaminen tähän ratkaisuun.

Ratkaisun laskeminen käytännössä käy helpoiten numeerisen integroinnin avulla; menetelmät löytyvät numeerisen analyysin oppikirjoista ja tarvittavat rutiinit monesta numeerisesta kirjastosta.

“Klassinen” vaihtoehto, monesta vanhemmasta oppikirjasta löytyvät sarjakehitelmät, on teoriassa tehokkaampi mutta monimutkainen.

Ellipsoidin tapauksessa voimme erikoistaa yhtälöt 2.2, 2.3 ja 2.4 seuraavien ilmaisujen avulla:

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2}, \\ p(\varphi) &= N(\varphi)\cos\varphi = a(1-e^2\sin^2\varphi)^{-1/2} \cdot \cos\varphi. \end{aligned}$$

## 2.5 Geodeettinen käänntehtävä

Suora numeerinen tapa ratkaista käänntehtävä on *iterointi*.

Olkoon annettuna  $\varphi_1, \lambda_1$  ja  $\varphi_2, \lambda_2$ . Ensin lasketaan likiarvot<sup>2</sup>  $(A_{12}^{(1)}, s_{12}^{(1)})$ , ja ratkaistaan geodeettinen päätehtävä  $(\varphi_2^{(1)}, \lambda_2^{(1)})$  laskemiseksi. Näin saadaan *sulkuvirheet*

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_2^{(1)} &\equiv \varphi_2^{(1)} - \varphi_2, \\ \Delta\lambda_2^{(1)} &\equiv \lambda_2^{(1)} - \lambda_2. \end{aligned}$$

Nyt nämä sulkuvirheet olisi käytettävä parempien arvojen  $(A_{12}^{(2)}, s_{12}^{(2)})$  laskemiseksi, ja niin edelleen.

<sup>1</sup>Tätä invarianttia voi myös ymmärtää *pyörähdysmomentin säilymisenä*: jos yksikkömassainen biljardipallo rullaa yksitoikkoisella yksikkönopeudella geodeettista viivaa pitkin, on sen pyörähdysmomentti  $z$ -akselin ympäri,  $(\mathbf{x} \times \mathbf{v})_3$ , vakio – koska palloon ei geometrian symmetriasta johtuen toimi mitään vääntöä tämän akselin ympäri. Tässä  $\mathbf{x}$  on paikka- ja  $\mathbf{v}$  nopeusvektori.

<sup>2</sup>... esimerkiksi pallotrigonometrian suljetuilla kaavoilla.

## 2 Vertausellipsoidin geometria

Liki lineaarista riippuvuutta  $(A_{12}, s_{12})$ :n ja  $(\varphi_2, \lambda_2)$ :n välillä voidaan approksimoida *pallogeometrian* avulla. Tarvittavat kaavat (1.5, 1.6):

$$\begin{aligned}\cos s_{12} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1), \\ \sin s_{12} \sin A_{12} &= \cos \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1).\end{aligned}$$

Tästä derivoimalla:

$$\begin{aligned}-\sin s_{12} \Delta s_{12} &= [\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)] \Delta \varphi_2 - \\ &\quad - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \Delta \lambda_2, \\ \sin s_{12} \cos A_{12} \Delta A_{12} + \cos s_{12} \sin A_{12} \Delta s_{12} &= -\sin \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \Delta \varphi_2 + \\ &\quad + \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) \Delta \lambda_2.\end{aligned}$$

Eli, jos kirjoitetaan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) & -\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \\ -\sin \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) & \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin s_{12} \\ \sin s_{12} \cos A_{12} & \cos s_{12} \sin A_{12} \end{bmatrix},$$

saadaan *iteraatiokaavoiksi*:

$$\begin{bmatrix} s_{12}^{(i+1)} \\ A_{12}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{12}^{(i)} \\ A_{12}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta s_{12}^{(i)} \\ \Delta A_{12}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{12}^{(i)} \\ A_{12}^{(i)} \end{bmatrix} + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta \varphi_2^{(i)} \\ \Delta \lambda_2^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Uusilla  $(s_{12}^{(i+1)}, A_{12}^{(i+1)})$  -arvoilla toistetaan geodeettisen päätehtävän laskenta uusien arvojen  $(\varphi_2^{(i+1)}, \lambda_2^{(i+1)})$  saamiseksi kunnes konvergenssi. Matriisit  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  voidaan laskea tarpeen mukaan uudelleen paremmilla likiarvoilla.

# 3 Vertausellipsoidin koordinaatit

## 3.1 Pallon ja ellipsoidin esitystavat

Pallon implisiittinen esitystapa on

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

missä  $a$  on säde (PYTHAGORAS). Parametrinen esitystapa on

$$\begin{aligned}x &= a \cos \beta, \\y &= a \sin \beta.\end{aligned}$$

Tästä saadaan ellipsi "puristamalla"  $y$ -akseli kertoimella  $b/a$ , eli

$$\begin{aligned}x &= a \cos \beta, \\y &= b \sin \beta,\end{aligned}$$

josta taas

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

eli

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

on implisiittinen esitystapa.

## 3.2 Eri leveysastetyypit

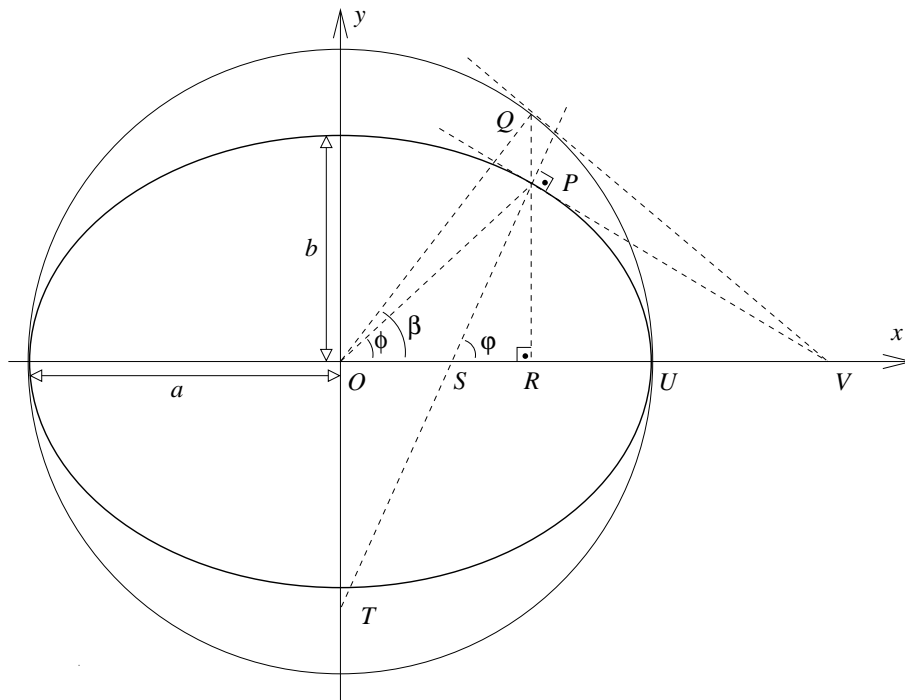
Leveysaste pyörähdysellipsoidilla kuvataan ainakin kolmella eri tavalla. Tarkistetaan pyörähdysellipsoidin läpileikkaus, joka on itse ellipsi; ns. *meridiaaniellipsi*.

Kuvassa näkyy seuraavat kolme leveysasteen käsitettä:

1. Maantieteellinen leveys  $\varphi$ : ellipsoidin normaalin suunta ekvaattoritasoon nähden;
2. Geosentrinen leveys  $\phi$  (tai  $\psi$ ): pisteen ja origon välisen viivan kulma ekvaattoritasoon kanssa;
3. Redukoitu leveys  $\beta$ : piste  $P$  siirretään suoraan  $y$ -suunnassa meridiaaniellipsiä ympäröivään ympyrään pisteeksi  $Q$ . Piste  $Q$  geosentrinen leveys on pisteen  $P$  redukoitu leveys.

Redukoitua leveyttä käytetään vain teoreettisissa yhteyksissä. Kartoissa käytetään maantieteellinen (eli geodeettinen, eli joskus ellipsoidiinen) leveysaste. Geosentrinen leveys esiintyy käytännössä vain satelliitti- ja avaruusgeodesiassa.

*Pituusaste*  $\lambda$  on sama, onko kyse maantieteellisistä, geosentrisistä vai redukoituista koordinaateista.



Kuva 3.1: Meridiaaniellipsoidi ja eri leveysastetyypit

### 3.3 Litistyksen mitat

Vertausellipsoidin litistys mitataan eri suureilla:

1. Litistyssuhde  $f = \frac{a-b}{a}$ ;
2. Ensimmäinen eksentrisyys (neliö)  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ;
3. Toinen eksentrisyys (neliö)  $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ .

### 3.4 Eri leveysastetyyppien väliset suhteet

Kuvasta 3.1 näkyy, että

$$\frac{PR}{QR} = \frac{b}{a}.$$

Kolmioissa  $ORQ$  ja  $ORP$  meillä on

$$\tan \beta = \frac{QR}{OR} \text{ ja } \tan \phi = \frac{PR}{OR};$$

siis

$$\frac{\tan \phi}{\tan \beta} = \frac{PR}{QR} = \frac{b}{a},$$

eli

$$\tan \beta = \frac{a}{b} \tan \phi.$$

Kolmioissa  $RVQ$ ,  $RVP$ :

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{QR}{VR} \text{ ja } \tan \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = \frac{PR}{VR},$$

siis

$$\frac{\cot \varphi}{\cot \beta} = \frac{PR}{QR} = \frac{b}{a},$$

eli

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \tan \beta.$$

Yhdistämällä vielä

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi.$$

### 3.5 Koordinaatit meridiaaniellipsissa

Lasketaan ellipsoidin pinnalla olevan pisteen  $P$  koordinaatit  $x, y$  seuraavasti.

Etäisyys  $PT$  merkitään symbolilla  $N$ , ns. *poikittaiskaarevuussäde*, eli ellipsoidin kaarevuussäde länsi-itä suunnassa.

Nyt meillä on

$$x = N \cos \varphi. \quad (3.1)$$

Myös

$$PR = OR \tan \phi = OR \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi = N \cos \varphi \cdot (1 - e^2) \tan \varphi$$

käyttämällä  $OR = x = N \cos \varphi$ . Lopputuloksena, koska  $y = PR$ :

$$y = N (1 - e^2) \sin \varphi. \quad (3.2)$$

Kaavat 3.1, 3.2 edustavat meridiaaniellipsin esitys geometrisen leveysasteen  $\varphi$  funktiona. *Muista*, että  $N$  on sen funktio, siis *se ei ole vakio!* Itse asiassa

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{N^2}{a^2} \cos^2 \varphi + \frac{N^2 (1 - e^2)^2}{b^2} \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{N^2}{a^2} \cos^2 \varphi + \frac{N^2 b^2}{a^2 a^2} \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{N^2}{a^2} \left( \cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \right) = 1; \end{aligned}$$

viimemainitusta ehdosta seuraa, että

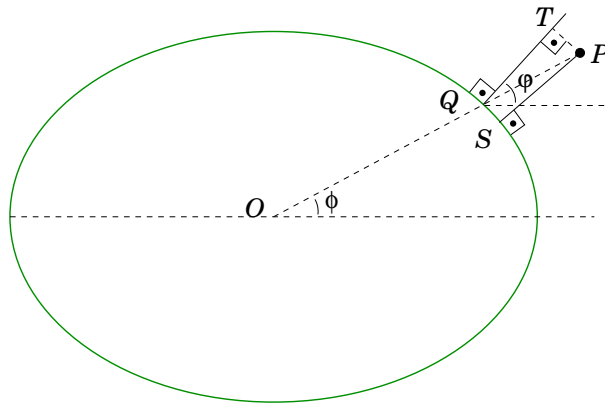
$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

käyttämällä määritelmä  $e^2 \equiv \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ .

### 3.6 Kolmiulotteiset suorakulmaiset koordinaatit vertausellipsoidilla

Yllä saatuja kaavoja yleistetään helposti: jos  $x$  ja  $y$  ovat meridiaanileikkauksen koordinaatit, ovat suorakulmaiset

$$\begin{aligned} X = x \cos \lambda &= N \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y = x \sin \lambda &= N \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z = y &= N (1 - e^2) \sin \varphi. \end{aligned}$$



Kuva 3.2: Suorakulmaisista koordinaateista maantieteellisiin

Mikäli tarkastetaan pisteet, jotka eivät ole vertausellipsoidin pinnalla, vain sen ylä- tai alapuolella avaruudessa, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tässä  $h$  on pisteen suora etäisyys ellipsoidin pinnasta (“ellipsoidinen korkeus”). Tämä suure on mielenkiintoinen, koska satelliittipaikannuslaitteet voidaan sanoa pystyvän mittaamaan juuri tätä suuretta (tarkemmin, ne mittaavat  $X, Y, Z$  ja laskevat niistä  $h$ ).

### 3.7 Maantieteellisten koordinaattien laskeminen suorakulmaisilta

Tämä, kaavojen (3.3) käänteinen tehtävä, ei ole aivan yksinkertaista ratkaistavaa.

Suljettuja ratkaisuja on, mutta ne ovat monimutkaisia. Tietenkin iteratiivinen ratkaisu joka perustuu suoraan kaavoihin (3.3) on täysin mahdollista ja usein käytettykin.

Pituusasteen  $\lambda$  laskeminen on äärimmäisen helppoa:

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X}.$$

Ainoa mahdollinen kompastuskivi on  $\lambda$ :n oikean kvadrantin identifiointi.

$\varphi$  ja  $h$  ovat mutkikkaampia. Ks. kuva 3.2, jossa pisteen  $P$  suorakulmaiset koordinaatit  $X, Y, Z$  ovat tiedossa ja maantieteelliset  $\varphi, \lambda, h$  ovat laskettavissa.

Lasketaan ensin *geosentrisen leveys* kaavalla:

$$\tan \phi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

ja *geosentrisen etäisyys* (säde) kaavalla:

$$OP = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Jos piste  $P$  sijaitsee vertausellipsoidilla, voitaisiin sen maantieteellinen leveysaste  $\varphi$  laskea seuraavalla kaavalla:

$$\tan \varphi_P = \frac{Z}{(1 - e^2) \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

(todistus suoraan kaavoilta (3.3).) Nyt kun  $P$  on ellipsoidin yläpuolella, saadaan tällä tavoin lasketuksi pisteen  $Q$  leveysaste  $\varphi_Q$ , jossa  $Q$  on ellipsoidin ja  $P$ :n säteen leikkauspiste, jolle (geometrisesti selvästi) yo. suhde on sama kuin  $P$ :lle.

Nyt lasketaan

$$\begin{aligned} X_Q &= N \cos \varphi_Q \cos \lambda, \\ Y_Q &= N \cos \varphi_Q \sin \lambda, \\ Z_Q &= N (1 - e^2) \sin \varphi_Q, \end{aligned}$$

josta

$$OQ = \sqrt{X_Q^2 + Y_Q^2 + Z_Q^2}$$

ja siis

$$PQ = OP - OQ.$$

Tämän lisäksi pikkukolmiossa  $TQP$  on laskettavissa ( $\varphi_Q$  lyhennetään  $\varphi$ :ksi):

$$\angle TQP = \varphi - \phi$$

ja siis

$$\begin{aligned} TP &= PQ \sin(\phi - \varphi), \\ TQ &= PQ \cos(\varphi - \phi). \end{aligned}$$

Nyt

$$h = PS \approx TQ$$

ja

$$\varphi_P \approx \varphi_Q - \frac{TP}{PO} \quad (3.4)$$

tai ehkä hiuskarvan verran tarkemmin<sup>1</sup>

$$\varphi_P \approx \varphi_Q - \frac{TP}{PO} \cos(\varphi - \phi). \quad (3.5)$$

Menetelmä on käytännössä aika tarkka. Jos  $h = 8000$  m ja  $j = 45^\circ$ , on  $TP \approx 26$  m,  $\varphi_P$ -ratkaisujen (3.4) ja (3.5) välillä on eroa  $0.1 \text{ mm}^2$ , mikä on myös eri ratkaisuisissa mahdollisesti olevan virheen suuruusluokka. Approksimaatio  $PS \approx TQ$  sisältää virhettä  $0.05 \text{ mm}$ .<sup>3</sup>

### 3.8 Meridiaanikaaren pituus

Meridiaanikaaren pituus, suure jota tarvitaan, esim., karttaprojektoiden (UTM, Gauß-Krüger) kanssa, lasketaan integroimalla.

Yllä määritettiin jo suure  $N$ , *poikittaiskaarevuussäde*. Toinen maan pinnan kaarevuussäde on *meridiaanin kaarevuussäde*  $M$ . Kun se on annettu leveysasteen  $\varphi$  funktiona, lasketaan matkan elementti  $ds$  seuraavasti:

$$ds = M d\varphi.$$

Nyt voidaan laskea meridiaanikaaren pituus seuraavasti:

$$s(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} M d\varphi. \quad (3.6)$$

Vertausellipsoidilla

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}},$$

<sup>1</sup>Tai sitten ei.  $PO$ :n sijasta pitäisi ottaa  $M(\varphi) + h$ , jossa  $M$  meridiaanin kaarevuussäde.

<sup>2</sup>Lineaarisesti  $TP(1 - \cos(\phi - \varphi))$ .

<sup>3</sup> $\frac{1}{2} \frac{TP^2}{OP}$ .

### 3 Vertausellipsoidin koordinaatit

eli

$$s(\varphi_0) = a(1 - e^2) \int_0^{\varphi_0} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi.$$

Tässä viimeinen kerroin voidaan kehitellä sarjaan – koska  $e^2 \sin^2 \varphi \ll 1$  – ja integroida termeittäin. Ks. kirjallisuutta. Tietysti myös numeerinen käsittely tulee kysymykseen, nykyisin se voi olla jopa paras vaihtoehto. MatLab tarjoaa tähän tarkoitukseen QUAD (kvadratuuri) -rutiinejaan.

# 4 Vertausjärjestelmät

## 4.1 GRS80 järjestelmä ja geometriset parametrit

Nykyisin ylivoimaisesti käytetyin globaalinen geodeettinen vertausjärjestelmä on *Geodetic Reference System 1980*, GRS80. Sen määrittävät parametrit ovat (e.g., (Heikkinen, 1981)):

Suure	Arvo	Selostus
$a$	6378137 m	pitkä akselipuolikas
$GM$	$3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	Maapallon massa $\times G$
$J_2$	$108263 \cdot 10^{-8}$	Dynaaminen muotokerroin
$\omega$	$7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$	Pyörähdysten kulmanopeus

Osa parametreista ovat geometrisia ( $a$ ), osa on dynaamisia ( $J_2, \omega$ ). Muut geometriset ja dynaamiset parametrit voidaan johtaa seuraavalla tavalla ((Moritz, 1992), seuraen (Heiskanen and Moritz, 1967, kaavat 2-90, 2-92)):

$$J_2 = \frac{e^2}{3} \left( 1 - \frac{2}{15} \frac{me'}{q_0} \right) \Rightarrow$$

$$e^2 = 3J_2 + \frac{2me'e^2}{15q_0}.$$

Tässä(Heiskanen and Moritz, 1967, kaava 2-70))

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

ja (määritelmien perusteella)

$$be' = ae$$

joiden avulla

$$e^2 = 3J_2 + \frac{4}{15} \frac{\omega^2 a^3}{GM} \frac{e^3}{2q_0}. \quad (4.1)$$

Tiedetään vielä ((Heiskanen and Moritz, 1967, kaava 2-58))

$$2q_0(e') = \left( 1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctan e' - \frac{3}{e'}$$

ja

$$e'(e) = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Nyt voidaan laskea  $e^2$  iteratiivisesti kaavan (4.1) avulla, joka askeleessa laskien uudelleen  $q_0(e'(e))$ . Tulos on

Suure	Arvo	Selostus
$e^2$	0.00669438002290	Ensimmäinen eksentrisyys neliöön
$e'^2$	0.00673949677548	Toinen eksentrisyys neliöön
$b$	6356752.314103 m	Lyhyt akselipuolikas
$1/f$	298.257222101	Käänteinen litistysuhde

#### 4 Vertausjärjestelmät

Tässä on käytetty  $1 - e^2 = 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$  ja  $1 - \frac{1}{f} = 1 - \frac{a - b}{a} = \frac{b}{a}$ , siis

$$1 - e^2 = \left(1 - \frac{1}{f}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{f} = 1 - \sqrt{1 - e^2}.$$

Usein käytetään  $(a, f)$  yhdessä GRS80 vertausellipsoidin määrittämiseksi.

GPS-järjestelmän virallinen vertausjärjestelmä on *World Geodetic System 1984* (WGS84), jonka vertausellipsoidi on *melkein* identtinen GRS80:n kanssa. Ei kuitenkaan *täysin*:

Suure	Arvo (WGS84)	Huomautus
$a$	6378137 m	sama
$1/f$	298.257223563	eri!
$b$	6356752.314245 m	ero 0.14 mm

Useimmiten ero, korkeintaan reilu kymmenesosa milliä, voidaan jättää huomiomatta. Se johtuu luultavasti epätarkasta numeerisesta laskennasta.

## 4.2 Gravimetriset parametrit

Gravimetristen parametrien laskenta tehdään seuraavasti ((Heiskanen and Moritz, 1967, kaavat 2-73, 2-74)):

$$\begin{aligned}\gamma_e &= \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m}{6} \frac{e' q'_0}{q_0}\right), \\ \gamma_p &= \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m}{3} \frac{e' q'_0}{q_0}\right),\end{aligned}$$

jossa ((Heiskanen and Moritz, 1967, kaava 2-67)):

$$q'_0(e') = 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2}\right) \left(1 - \frac{1}{e'} \arctan e'\right) - 1.$$

Ratkaisu taas iteratiivisesti, tuloksena ( $f^* \equiv \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$ ):

Suure	Arvo	Selostus
$\gamma_e$	9.7803267715 ms <sup>-2</sup>	Ekvaattorin normaalipainovoima
$\gamma_p$	9.8321863685 ms <sup>-2</sup>	Napojen normaalipainovoima
$f^*$	0.00530244011229	“Painovoimalitistys”

Tarkastukseksi voidaan vielä laskea CLAIRAUT'n lause tarkassa muodossaan ((Heiskanen and Moritz, 1967, kaava 2-75)):

$$f + f^* = \frac{\omega^2 b}{\gamma_e} \left(1 + e' \frac{q'_0}{2q_0}\right).$$

Yksinkertainen suljettu, kaunis kaava vertausellipsoidin pinnan normaalipainovoimalle on Somigliana-Pizzetti-kaava:

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 \varphi + b\gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}.$$

# 5 Rotaatiomatriisien käyttö

## 5.1 Yleistä

Aina kun muunnetaan koordinaattijärjestelmän akseleiden orientaatio, tapahtuu suorakulmaisissa koordinaateissa kirjoitettuna, *kertolasku rotaatiomatriisin kanssa*.

Tutkitaan asiaa ensin tasossa  $(x, y)$ , kuva 5.1.

Uusi koordinaatti

$$x'_P = OU = OR \cos \alpha,$$

jossa

$$OR = OS + SR = x_P + PS \tan \alpha = x_P + y_P \tan \alpha.$$

Sijoittamalla

$$x'_P = (x_P + y_P \tan \alpha) \cos \alpha = x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha.$$

Samalla tavalla

$$y'_P = OT = OV \cos \alpha,$$

jossa

$$OV = OQ - VQ = y_P - PQ \tan \alpha = y_P - x_P \tan \alpha,$$

josta

$$y'_P = (y_P - x_P \tan \alpha) \cos \alpha = -x_P \sin \alpha + y_P \cos \alpha.$$

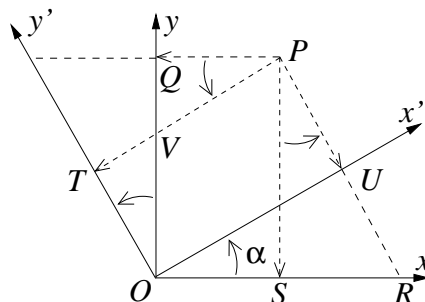
Yhteenvedo matriisikaavana:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

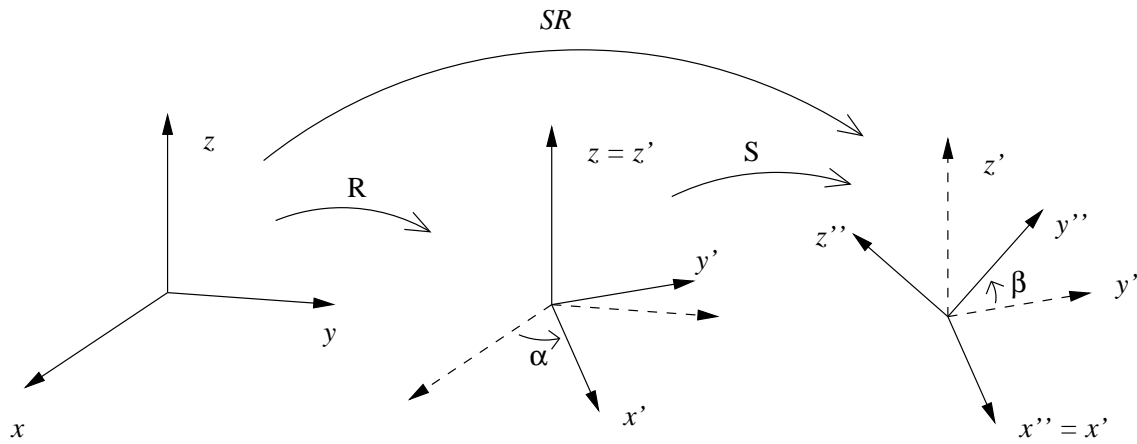
Miinusmerkin paikkaa saadaan helpoimmin piirtämällä molemmat akseliparit paperille, merkitä kulma  $\alpha$ , ja päätellä graafisesti, onko positiivisella  $x$ -akselilla olevalle pisteelle (siis:  $y = 0$ ) uusi  $y'$ -koordinaatti positiivinen vai negatiivinen: yllä olevassa tapauksessa saadaan

$$y' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = -\sin \alpha \cdot x,$$

eli  $y' < 0$ , siis miinusmerkki on todella matriisin vasemmassa alanurkassa.



Kuva 5.1: Rotaatio tasossa



Kuva 5.2: Rotaatioiden assosiativisuus

## 5.2 Matriisien ketjutus kolmessa ulottuvuudessa

Kolmiulotteisessa koordinaattijärjestelmässä voidaan kaksiulotteinen pyörähdysmatriisi kirjoittaa seuraavalla tavalla:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

eli:  $z$ -koordinaatti kopioituu sellaisenaan  $z' = z$ , kun  $x$  ja  $y$  muuntuvat keskenään yo. kaavan mukaisesti.

Jos on useita muunnoksia peräkkäin, saadaan lopullinen muunnos “ketjuttamalla” muunnosmatriisit. Eli jos

$$\mathbf{r}'' = S\mathbf{r}', \mathbf{r}' = R\mathbf{r},$$

jossa

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix},$$

silloin (assosiativisuus):

$$\mathbf{r}'' = S(R\mathbf{r}) = (SR)\mathbf{r},$$

eli matriisit yhdistetään.

Muista, että

$$RS \neq SR,$$

eli matriisit ja muunnokset eivät ole kommutatiivisia<sup>1</sup>!

Ks. kuva 5.2.

## 5.3 Ortogonaalit matriisit

Rotaatiomatriisit ovat *ortogonaaleja*, ts.

$$RR^T = R^T R = I; \tag{5.1}$$

niiden käänteismatriisi on sama kuin transpoosi.

<sup>1</sup>Kaksiulotteiset rotaatiot ovat itse asiassa kommutatiivisia; ne voidaan kuvata myös kompleksilukujen avulla.

Esimerkiksi,

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \left( = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} \right),$$

täysin ymmärrettävissä, koska sehän on kierto liike saman akselin ympäri, saman verran, mutta *vastakkaiselle suunnalle*.

Yllä oleva kaava kirjoitettuna seuraavaksi:

$$\sum_{i=1}^n R_{ij}R_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jos } j = k \\ 0 & \text{jos } j \neq k \end{cases}.$$

Rotaatiomatriisin *sarakkeet ovat ortonormaaleja*, niiden normi (pituus) on 1 ja ne ovat keskenään ortogonaaleja. Se näkyy esimerkkimatriisimme tapauksessa:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} &= 1, \\ \cos \alpha \cdot \sin \alpha + (-\sin \alpha) \cdot \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Usein tapaa muitakin ortogonaalisia matriiseja:

1. Akselin peilintämatriisi; esim.:

$$M_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

joka kääntää *y*-koordinaatin suunta eli etumerkkiä.

2. Akselien vaihtomatriisi (permutaatio):

$$P_{12} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Kaikkien akselien *inversio*:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sekä  $M$  että  $P$  poikkeavat rotaatiomatriiseista siinä mielessä, että niiden *determinantti* on  $-1$ , kun se rotaatiomatriisien tapauksessa on  $+1$ .  $X$ -matriisin determinantti on  $(-1)^n$ ,  $n$  ollessa ulottuvuuksien määrä (eli 3 yo. tapauksessa). Determinantti  $-1$  merkitsee, että muunnos muuttaa oikeakätinen koordinaatisto vasenkätiseksi ja päinvastoin.

Jos kerrotaan vaikkapa  $M_2$  ja  $P_{12}$ , saadaan

$$M_2 P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tämän determinantti on  $+1$ . Kuitenkin se on taas rotaatiomatriisi:

$$R_3(90^\circ) = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}!$$

*Kaikki positiivisen determinantin ortogonaalit muunnokset ovat rotaatiot.*

(Ilman todistusta vielä, että *kaikki* ortogonaalit muunnokset voidaan kirjoittaa joko rotaationa tietyn akselin ympäri, tai peilauksena tietyn tason kautta.)

## 5.4 Toposentriset järjestelmät

Myös “paikalliset tähtitieteelliset”. Huomaa, että kun geosentrisen järjestelmä on “uniikki” eli sitä on olemassa vain yksi tietyn tyyppinen, on paikallisia järjestelmiä niin monta kun on pisteitä maan pinnalla, eli äärettömän monta.

Järjestelmän akselit:

1.  $z$ -akseli osoittaa paikalliseen zeniittiin, eli suoraan ylöspäin.
2.  $x$ -akseli osoittaa paikalliseen pohjoiseen.
3.  $y$ -akseli on kohtisuorassa molempia muita kohtaan ja osoittaa itään.

Järjestelmän koordinaatit ovat:

- o Atsimuutti  $A$
- o Zeniittikulma  $\zeta$ , vaihtoehtoisesti korkeuskulma (elevaatio)  $\eta = 100 \text{ gon} - \zeta$ .
- o Etäisyys  $s$

Muunnos pisteen  $P$  toposentristen pallokoordinaattien ja suorakulmaisten koordinaattien välillä on:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} s \cos A \sin \zeta \\ s \sin A \sin \zeta \\ s \cos \zeta \end{bmatrix}_T.$$

Käänteismuunnos:

$$A = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{kvadrantti!}),$$

$$\zeta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

## 5.5 Geosentrisestä toposentriseen ja takaisin

Olkoon  $(X, Y, Z)$  geosentrisen koordinaatisto ja  $(x, y, z)$  toposentrisen *kojekoordinaatisto* (siis:  $x$ -akseli osoittaa kojeen nollasuuntaan eikä pohjoiseen; teodoliitin tapauksessa vaakakehän nollan suunta.)

Tässä tapauksessa voidaan symbolisesti kirjoittaa:

$$\mathbf{x} = R_1 R_2 R_3 (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0),$$

missä kiertomatriisit  $R_3, R_2, R_1$  toimivat peräkkäin  $\mathbf{X}$ :n muuntamiseksi  $\mathbf{x}$ :ksi. Ks. kuva.  $\mathbf{X}_0$  on paikallisen origon koordinaatit geosentrisessä järjestelmässä.

Tämän käänteinen muunnosketju on

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + R_3^T R_2^T R_1^T \mathbf{x},$$

kuten voidaan helposti johtaa kertomalla ensimmäinen kaava ensin *vasemmalta puolelta* matriisilla  $R_1^T = R_1^{-1}$ , sitten matriisilla  $R_2^T$ , ja sitten matriisilla  $R_3^T$ , ja lopuksi siirtämällä  $\mathbf{X}_0$  toiselle puolelle.

$R_3$  kiertää koordinaatistoa  $z$ -akselin ympäri Greenwich-meridiaanista havaintopaikan paikalliseen meridiaaniin, kiertokulma  $\lambda$ :

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos \lambda & + \sin \lambda & 0 \\ - \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$



## 5.6 Geodeettinen pää- ja käänteistehtävä rotaatiomatriiseilla

On mahdollista ratkaista geodeettista pää- ja käänteistehtävä kolmiulotteisesti, ilman pyörähdysellipsoidin pintageometrian käyttöä.

Idea perustuu siihen, että on annettu pisteen tai pisteiden kolmiulotteiset koordinaatit, vaikkapa muodossa  $(\varphi, \lambda, h)$  johonkin vertausellipsoidin suhteen; ja on annettu tai laskettavana toisen pisteen atsimuti, korkeuskulma ja etäisyys ensimmäisestä pisteestä nähtynä. Päätehtävässä on laskettavana toisen pisteen ellipsoidiset koordinaatit  $(\varphi, \lambda, h)$ .

### 5.6.1 Geodeettinen päätehtävä

Annettuna pisteen  $A$  ellipsoidiset koordinaatit  $(\varphi_A, \lambda_A, h_A)$  ja pisteessä toisen pisteen  $B$  atsimuti  $A_{AB}$ , etäisyys  $s_{AB}$  ja joko korkeuskulma  $\eta_{AB}$  tai zeniittikulma  $z_{AB} \equiv 90^\circ \eta_{AB}$ .

Laskettavana on nyt pisteen  $B$  koordinaatit  $(\varphi_B, \lambda_B, h_B)$ .

Seuraavasti:

1. Muunna  $B$ :n paikalliset  $A$ -toposentriset koordinaatit  $(A_{AB}, s_{AB}, z_{AB})$  suorakulmaisiksi:

$$\mathbf{x}_{AB} \equiv \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{bmatrix} = s_{AB} \begin{bmatrix} \cos A_{AB} \sin z_{AB} \\ \sin A_{AB} \sin z_{AB} \\ \cos z_{AB} \end{bmatrix}.$$

2. Muunna rotaatiomatriisien avulla nämä suorakulmaiset koordinaattierot geosentrisiin<sup>2</sup>:

$$\mathbf{X}_{AB} = \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_2^T \mathbf{x}_{AB},$$

joissa  $\mathbf{R}_3$  ja  $\mathbf{R}_2$  on jo annettuina, kaavat (5.2) ja (5.3).

3. Lisää tulokseen pisteen  $A$  geosentriset koordinaatit:

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_A + \mathbf{X}_{AB},$$

jossa

$$\mathbf{X}_A = \begin{bmatrix} (N(\varphi_A) + h_A) \cos \varphi_A \cos \lambda_A \\ (N(\varphi_A) + h_A) \cos \varphi_A \sin \lambda_A \\ (N(\varphi_A) (1 - e^2) + h_A) \sin \varphi_A \end{bmatrix}.$$

4. Muunna saadut geosentriset  $B$ -koordinaatit takaisin ellipsoidiseen muotoon luvussa (3.7) kuvatulla tavalla:

$$\mathbf{X}_B \rightarrow (\varphi_B, \lambda_B, h_B).$$

### 5.6.2 Geodeettinen käänteistehtävä

Annettuna kahden pisteen ellipsoidiset koordinaatit  $(\varphi_A, \lambda_A, h_A)$  ja  $(\varphi_B, \lambda_B, h_B)$ . Laskettavana pisteen  $B$  toposentriset pallokoordinaatit atsimuti  $A_{AB}$ , zeniittikulma  $z_{AB}$  ja etäisyys  $s_{AB}$ .

1. Muuta  $A$ :n ja  $B$ :n ellipsoidiset koordinaatit geosentrisiksi suorakulmaisiksi:  $\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B$ .
2. Laske pisteiden välinen relatiivinen **vektori**

$$\mathbf{X}_{AB} = \mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A.$$

<sup>2</sup>Tarkemmin, geosentrisessä *orientaatiossa* oleviksi koordinaatti-eroiksi – origonhan ei ole tässä tapauksessa maan massakeskipiste!

3. Pisteessä  $A$ , muuta tämä vektori toposentriseen suorakulmaiseen järjestelmään

$$\mathbf{x}_{AB} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{X}_{AB};$$

4. muunnetaan pallokoordinaateiksi kääntämällä kaava

$$\mathbf{x}_{AB} = s_{AB} \begin{bmatrix} \cos A_{AB} \sin z_{AB} \\ \sin A_{AB} \sin z_{AB} \\ \cos z_{AB} \end{bmatrix},$$

tuttujen arctangentti- ja Pythagoraskaavojen avulla:

$$\begin{aligned} s_{AB} &= \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2}, \\ \tan A_{AB} &= \frac{y_{AB}}{x_{AB}}, \\ \tan z_{AB} &= \frac{\sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2}}{z_{AB}}. \end{aligned}$$

### 5.6.3 Vertailu ellipsoidipintaratkaisun kanssa

Tällä tavoin saatu ratkaisu on atsimutien kohdalla hyvin lähellä siitä, jota saadaan käyttämällä geodeettinen viiva  $A$ :n ja  $B$ :n projektiopisteiden välillä ellipsoidin pinnalla. *Eivät kuitenkaan identtisiä*. Atsimutit ovat ns. *normaalitasojen atsimuteja*, jotka eroavat kaarisekunnin muutaman murto-osan verran geodeettisen viivan atsimuteista jopa sadan kilometrin pituisella matkalla. Hyvin pieni ero, muttei nolla!

Etäisyys on tietenkin suora avaruusjana eikä geodeettisen viivan pituus. Tämä ero on huomattava.



# 6 Koordinaattijärjestelmät ja muunnokset

## 6.1 Geosentriset terrestriset järjestelmät

Yleensä geosentriset järjestelmät, kuten WGS84, määritellään seuraavasti:

1. Koordinaatiston origo yhtyy maan massakeskipisteeseen.
2. Koordinaatiston  $Z$ -akseli on orientoitunut maan pyörähdysakselin eli pohjoisnavan suuntaan.
3. Koordinaatiston  $X$ -akseli on samansuuntainen Greenwichin meridiaanin kanssa.

Sellaiset “mukana pyörivät” järjestelmät kutsutaan *terrestrisiksi*. Myös ECEF (Earth Centred, Earth Fixed).

## 6.2 Konventionaalinen terrestrinen järjestelmä

Tähän on kuitenkin tehtävä seuraavat *tarkennukset*:

1.  $Z$ -akselin suunnaksi käytetään ns. CIO eli Conventional International Origin, joka on navan keskimääräinen paikka vuosina 1900-1905.

Maapallon hetkellinen eli todellinen napa kiertää CIO:n ympäri quasi-periodisella tavalla: napaliike. Pääperiodit ovat vuosi ja n. 435 vuorokautta (ns. “Chandler wobble”), amplitudi muutama kymmenesosa kaarisekuntia — mikä vastaa maan pinnalla muutamaan metriin.

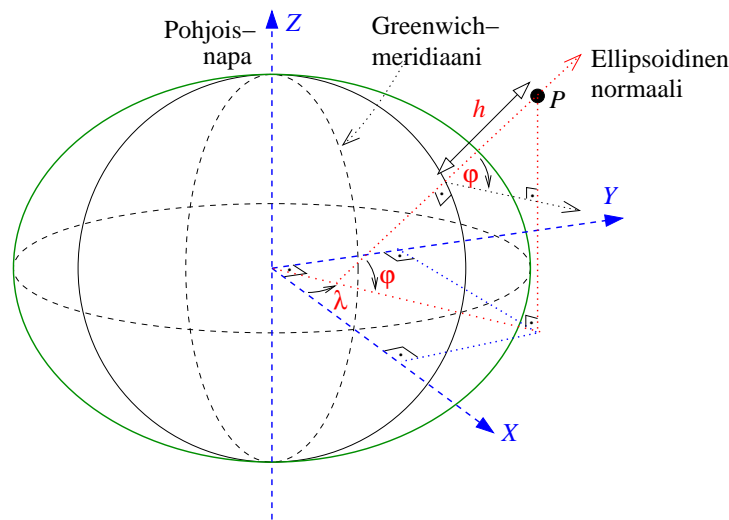
2. Nykyisin nollameridiaanitaso ei enää perustu Greenwichin observatorion tekemiin havaintoihin, vain maailmanlaajuisiin VLBI-havaintoihin. Näitä koordinoi International Earth Rotation Service (IERS). Se siis ei ole enää *tarkasti* Greenwichin observatorion meridiaani.

Täällä tavoin saadaan kiinteän maapallon “mukana pyörivä” eli ECEF (Earth Centered, Earth Fixed) vertausjärjestelmä, esim. WGS84 tai ITRS $_{xx}$  (ITRS = International Terrestrial Reference System,  $xx$  vuosiluku, IERS:n luomia). Toinen nimitys on Conventional Terrestrial System (CTS).

## 6.3 Hetkellinen terrestrinen järjestelmä

Mikäli otetaan konventionaalisen navan sijasta hetkellinen napa eli maan pyörähdysakselin suunta, saadaan konventionaalisen sijasta ns. *hetkellinen terrestrinen järjestelmä* (ITS, Instantaneous Terrestrial System). Tätä on syytä käyttää esim. tähtitieteellisten tai satelliittihavaintojen kanssa, koska se kuvaa maapallon todellista orientaatiota tähtitaivaan nähden.

Muunnos konventionaalisen ja hetkellisen järjestelmän välillä tapahtuu *napaliikeparametrien* avulla: jos ne ovat  $x_P, y_P$  —  $x_p$  osoittaa Greenwichiin päin ja  $y_p$  Greenwich-meridiaanista itään



Kuva 6.1: Ellipsoidi ja geosentriset koordinaatit

päin — saadaan:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ITS} &= R_1(x_p) R_2(y_p) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CTS} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos x_p & 0 & -\sin x_p \\ \sin x_p \sin y_p & \cos y_p & \cos x_p \sin y_p \\ \sin x_p \cos y_p & -\sin y_p & \cos x_p \cos y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CTS} \approx \\
 &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CTS},
 \end{aligned}$$

koska kulmat  $x_p, y_p$  ovat niin äärimmäisen pieniä.

## 6.4 Geosentrisen inertiaalinen järjestelmä

Vaihtoehtona terrestriseen järjestelmään on seuraava valinta:

1. Koordinaatiston origo yhtyy taas maan massakeskipisteeseen.
2. Koordinaatiston  $Z$ -akseli on taas orientoitunut maan pyörähdysakselin eli pohjoisnavan suuntaan.
3. *Mutta:*  $X$ -akseli osoittaa taivaan keväntasauspisteeseen.

Tällainen vertausjärjestelmä ei pyöri kiinteän maan mukaan. Se on (hyvässä approksimaatiossa) *inertiaalinen*. Puhutaan myös *ekvatoriaalisesta* koordinaattijärjestelmästä. Tässä järjestelmässä suuntakoordinaatit ovat tähtitieteelliset rektaskensio ja deklinaatio  $\alpha, \delta$ .

Jos tähden “taivaanpallokoordinaatit”  $\alpha, \delta$  ovat tunnettuja, voidaan laskea yksikkösuuntavektori seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix}.$$

Päinvastainen laskenta, eli  $\alpha, \delta$  laskeminen suuntavektorista:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arctan \frac{Y}{X} \quad (\text{kvadrantti!}), \\
 \delta &= \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.
 \end{aligned}$$

Tässä on kuitenkin otettava huomioon, että, vaikka  $\delta$  annetaan asteina, minuutteina ja sekunteina,  $\alpha$  annetaan *aikayksiköissä*. Ne on ensin muunnettava asteisiin jne. Yksi tunti vastaa 15 asteeseen, yksi minuutti 15 kaariminuuttiin ja yksi sekunti 15 kaarisekuntiin.

Käytettävät tähtien koordinaatit eli *paikat* ovat *näennäisiä* (en. *apparent*), tekninen termi joka merkitsee “niin kuin ne tietyllä ajan ketkellä näyttävät<sup>1</sup>”. Tähtikartasta luetut  $\alpha, \delta$ -paikat eivät ole näennäisiä. Ne ovat tietyn sovitun ajanhetken, esim. 1950.0 eli 2000.0, paikat. Näennäisten paikkojen saaminen vaati pitkä reduktioketju, jossa otetaan huomioon prekessio, nutaatio, maan pyörähdysnopeuden vaihtelut, sekä myös vuotuinen parallaksi ja tähden mahdollinen ominaisliike.

Tähtien näennäiset paikat löytyvät hakuteoksesta “Apparent Places of Fundamental Stars” esilaskettuina ja taulukoituna päivämäärän mukaan.

---

<sup>1</sup>...maan keskipisteestä. Kuitenkin kiintotähdet ovat niin kaukana, että havaitsijan paikasta ei ole väliä.



# 7 Taivaalliset koordinaattijärjestelmät

## 7.1 Tähtiaika

Muunnos inertiaalisesta järjestelmästä terrestriseen menee *tähtiajan* kautta.

- o Greenwichin näennäinen tähtiaika (Greenwich Apparent Sidereal Time, GAST, symboli  $\theta_0$ )
- o Havaintopaikan näennäinen tähtiaika, LAST, symboli  $\theta$ .

$$\theta = \theta_0 + \Lambda^{\text{hms}},$$

missä  $\Lambda$  on havaintopaikan *tähtitieteellinen pituusaste*, sopivasti konvertoituna aikayksiköihin.

GAST on

- o muunnoskulma inertiaalisen ja terrestrisen (“mukana pyörivän”) järjestelmien välillä, eli
- o maapallon orientaatiota kuvaava kulma inertiaalisessa järjestelmässä, eli
- o Greenwichin meridiaanin ja kevättasauspisteen välinen pituusero.

Myös Greenwichin näennäinen tähtiaika taulukoidaan — jälkeinpäin, kun tarkka maan pyörähdys on tiedossa. GAST voidaan laskea noin sekunnin tarkkuudella kalenterin ja siviiliajan perusteella.

Mikäli muutama minuutti riittää, voidaan GAST jopa taulukoida valmiiksi vuosipäivän funktiona. Taulukko tähtiajan vuosisuudelle kuukauseittain on:

Kuukausi	$\theta_{kk}$	Kuukausi	$\theta_{kk}$	Kuukausi	$\theta_{kk}$	Kuukausi	$\theta_{kk}$
Tammi	6 40	Huhti	12 40	Heinä	18 40	Loka	0 40
Helmi	8 40	Touko	14 40	Elo	20 40	Marras	2 40
Maalis	10 40	Kesä	16 40	Syys	22 40	Joulu	4 40

Taulukon konstruointiseksi on käytetty seuraava tieto: Maaliskuun 21. päivänä klo 12 UTC Greenwichissä auringon eli kevättasauspisteen tuntikulma, eli tähtiaika, on  $0^{\text{h}}$ . Tämä Greenwichin tähtiaika  $\theta_0$  koostuu *kahdesta osasta*: vuosisuus  $\theta_a$  ja kellonaika  $\tau$  (UTC eli Greenwich Mean Time). Siis tähtiajan vuosisuus saadaan vähentämällä:  $\theta_a = \theta_0 - \tau = -12^{\text{h}}$ , siis  $12^{\text{h}}$  täyden kierroksen eli  $24^{\text{h}}$ :n lisäämisen jälkeen.

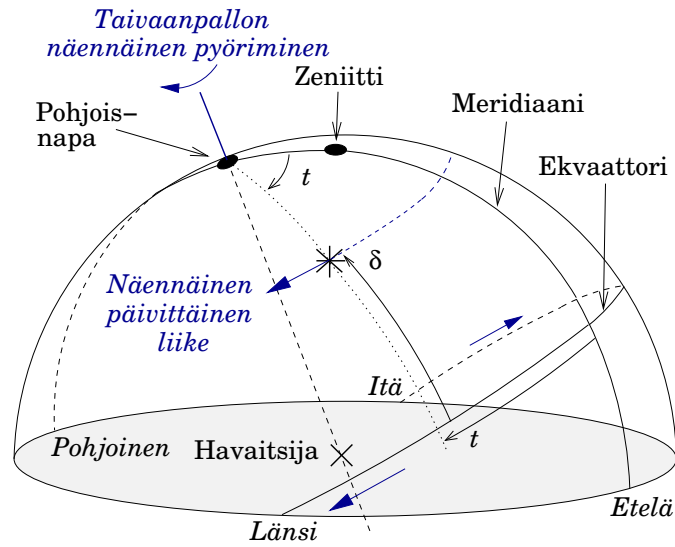
Jos maaliskuun 21. päivän, tai oikeastaan maaliskuun 20. päivän illan jälkeisen keskiyön, tähtiaika on  $12^{\text{h}} 00^{\text{m}}$ , on maaliskuun 0. tähtiaika  $12^{\text{h}} 00^{\text{m}} - 4 \times 20^{\text{m}} = 10^{\text{h}} 40^{\text{m}}$ ; Muista että yksi päivä vastaa noin neljään minuuttiin.

Taulukko saadaan täytetyksi säännöllä 1 kuukausi  $\approx 2^{\text{t}}$ . (Taulukosta saataisiin periaatteessa karvan verran enemmän tarkkuutta irti ottamalla huomioon kuukausien vaihtelevat pituudet. Kuitenkin karkausvuosisykli aiheuttaa saman verran virhettä.)

Tämän jälkeen paikallista tähtiaikaa saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_{kk} + p + \tau + \Lambda^{\text{hms}} \\ &= \theta_a + \tau + \Lambda^{\text{hms}} = \\ &= \theta_0 + \Lambda^{\text{hms}}\end{aligned}$$

jossa



Kuva 7.1: Tuntikulma ja muut taivaanpallon koordinaatit

$\theta_{kk}$  arvo yllä olevasta taulukosta

$p$  päiväluku kuukauden sisällä

$\tau$  aika (UTC)

$\Lambda$  maa-aseman pituusaste muunnettuna tunneiksi, minuuteiksi ja sekunneiksi ( $15^\circ = 1^h$ ,  $1^\circ = 4^m$ ,  $1' = 4^s$ ).

## 7.2 Taivaanpallon trigonometria

Taivaanpallolla on olemassa ainakin kahdet eri koordinaatit: paikallisia ja ekvatoriaalisia.

Paikalliset pallokoordinaatit  $[x \ y \ z]^T$  ( $x$  pohjoiseen,  $z$  zeniittiin) liittyvät paikallisiin tähtitieteelliseen suorakulmaiseen järjestelmään seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A \sin \tilde{z} \\ \sin A \sin \tilde{z} \\ \cos \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A \cos \eta \\ \sin A \cos \eta \\ \sin \eta \end{bmatrix},$$

missä  $A$  on atsimuti (pohjoisesta myötäpäivään),  $\tilde{z}$  zeniittikulma ja  $\eta$  korkeus- eli elevaatiokulma.

Ekvatoriaaliset koordinaatit ovat  $\alpha$ ,  $\delta$ , rektaskensio ja deklinaatio; niiden etuna on, että tähtien koordinaatit ("paikat") ovat lähestulkoon vakioita. Haittana on, että ei ole olemassa yksinkertainen yhteys paikallisiin tähtitieteellisiin koordinaatteihin.

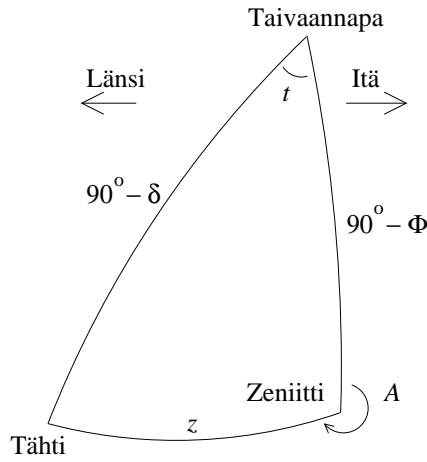
Koordinaattien *välimuoto* on: *tuntikulma* ja deklinaatio,  $t$ ,  $\delta$ . Tuntikulmaa määritetään kuten kuvassa on piirretty, kulmaetäisyys maan pyörähdyksensä ympäri (tai taivaannavalla) mittattuna paikan keskimeridiaanista.

Kaava:

$$t = \theta_0 + \Lambda - \alpha,$$

missä  $\theta_0$  on Greenwichin näennäinen tähtiaika (GAST),  $\Lambda$  on paikan (tähtitieteellinen) pituusaste ja  $\alpha$  tähden rektaskensio.

Jos tähti on meridiaanissa, on  $t = 0$  ja  $\alpha = \theta_0 + \Lambda$ . Tähän perustuu läpikulkukokeen käyttö: mikäli kolmesta suuresta  $\theta_0$ ,  $\alpha$  tai  $\Lambda$  kaksi on tiedossa, voidaan kolmas laskea. Sovelluksen mukaan puhutaan tähtitieteellisestä pituudenmäärittämisestä, ajanmäärittämisestä tai tähtien paikkojen määrittämisestä. "One man's noise is another man's signal".



Kuva 7.2: Tähtitieteellinen peruskolmio

Taivaanpallolla on olemassa *tähtitieteellinen peruskolmio*: se koostuu tähdestä, taivaan pohjoisnavasta ja zeniitista. Kolmion kulmista mainittakoon  $t$  (pohjoisnapa) ja  $A$  (zeniitti), sen sivuista  $90^\circ - \Phi$  (napa-zeniitti),  $90^\circ - \delta$  (tähti-napa) ja  $z$  (tähti-zeniitti).

Sinikaava:

$$\frac{-\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin t}{\sin z}.$$

Kosinikaava:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \delta \sin \Phi + \cos \delta \cos \Phi \cos t, \\ \sin \delta &= \sin \Phi \cos z + \cos \Phi \sin z \cos A. \end{aligned}$$

Lasketaan ensin kosinikaavalla joko  $\delta$  tai  $z$ , ja sitten sinikaavalla joko  $t$  tai  $A$ . Näin saadaan joko  $(A, z) \leftrightarrow (t, \delta)$  molempaan suuntaan.

### 7.3 Rotaatiomatriisien käyttö

Eri taivaallisten koordinaattijärjestelmien muunnokset voidaan johtaa myös suorakulmaisissa koordinaateissa käyttämällä rotaatiomatriisit.

Olkoon toposentrinen koordinaattivektori (pituus 1)  $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ . Pallokoordinaateissa se on

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{bmatrix}.$$

Samaa vektoria voidaan kirjoittaa paikallisessa tähtitieteellisessä:

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}.$$

Muunnos niiden välillä on:

1.  $x$ -akselin suunta muutetaan pohjoisesta etelään
2. uutta  $xz$ -akseliparia käännetään etelään  $90^\circ - \varphi$  verran,  $\varphi$  maantieteellinen leveysaste.
3. uutta  $xy$ -akseliparia käännetään länteen (myötäväivään) paikallisesta meridiaanista kevät-tasauspisteeseen  $\theta$ :n verran, paikallinen (näennäinen) tähtiaika.

Matriisit ovat:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 R_2 &= \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - \varphi) & 0 & \sin(90^\circ - \varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(90^\circ - \varphi) & 0 & \cos(90^\circ - \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix}, \\
 R_3 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Lasketaan

$$\begin{aligned}
 R_3 R_2 M_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta & \cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tämän jälkeen:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta & \cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{bmatrix},$$

josta identifioimme heti

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos A,$$

kosinikaava tähti-taivaannapa-zeniitti -kolmiossa.

Käänteinen muunnos on ortogonaalisuuden perusteella (transpoosi!)

$$\begin{bmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}.$$

Niiden avulla pallokoordinaatimuunnosta voimme suorittaa kolmiulotteisten “suuntakosinien” kautta.

## 7.4 Satelliittien radoista

Kuvataan tässä ympyränmuotoisten satelliittiratojen laskeminen pallon muotoisen maan ympäri; tämä on riittävän hyvä ainakin visuaalisten satelliittihavaintojen mahdollistamiseksi ja satelliittien löytämiseksi.

Maata kiertää tuhansia satelliittejä, joista suurin osa on hyvin pieniä. Muutama sataa kuitenkin ovat niin kookkaita, yleensä laukaisuraketien viimeisiä vaiheita, että ne näkyvät pimeän jälkeen auringon valossa jopa paljain silmin. Kiikareilla ne ovat jo hyvin havaittavissa. Niiden ratojen korkeudet vaihtelevat 400 km:sta yli 1000 km:iin; ratatason inkliinaatiot vaihtelevat suuresti, mutta tietyt inkliinaatio-arvot, kuten  $56^\circ$ ,  $65^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $74^\circ$ ,  $81^\circ$ ,  $90^\circ$  ja  $98^\circ$  ovat erityisen suosittuja.

Omaa luokkaansa muodostuvat *Iridium-satelliitit*, jotka ovat jääneet avaruuteen epäonnistuneen matkapuhelinprojektin jälkeen. Jokaisella Iridium-satelliitilla on pitkä metallinen antenni joka heijastaa auringonvaloa sopivassa asennossa erittäin kirkkaasti. Iridium-ennusteet löytyvät [www:stä](http://www.sta).

Kun tunnetaan satelliitin ekvaatorinylityksen eli radan “nousevan solmun” aika  $t_0$  ja rektaskensio (inertiaalinen “pituusaste”)  $\alpha_0$ , voidaan laskea ajan ja pituusasteen korjaukset eri leveysasteille kuten seuraavassa on kuvattu.

## 7.5 Tietyn leveysasteen ylitys inertiaalisessa järjestelmässä

Jos tavoiteleveysaste  $\varphi$  on annettu, voidaan laskea matka  $\nu$  nousevasta solmusta (“downrange kulma”) kulmayksiköissä seuraavasti:

$$\sin \nu = \frac{\sin \varphi}{\sin i},$$

jossa  $i$  on satelliittiradan *inklinaatio*. Tästä seuraa taas kulunut aika Keplerin kolmannen lain avulla; periodi eli kiertoaika on:

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a^3}.$$

Tästä

$$\Delta\tau = \frac{\nu}{2\pi} P,$$

lentoaika ekvaattorista leveysasteelle  $\varphi$ .

Satelliittiradan atsimutikulma paikallisen meridiaanin kanssa saadaan Clairaut’n kaavasta (luku 2.3):

$$\cos \varphi \sin A = \cos(0) \cos i,$$

koska ekvaattorilla ( $\varphi = 0$ )  $A = \frac{\pi}{2} - i$ , siis

$$\sin A = \frac{\cos i}{\cos \varphi}.$$

Nyt saadaan rektaskensio-ero ekvaattorin ylityksen kanssa pallokolmion sinikaavan avulla:

$$\frac{\sin \Delta\alpha}{\sin A} = \frac{\sin \varphi}{\sin i} \Rightarrow \sin \Delta\alpha = \frac{\tan \varphi}{\tan i}.$$

Tämän jälkeen saadaan satelliitin rektaskensio ja aika leveysasteen  $\varphi$  ylittäessä:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \Delta\tau, \\ \alpha &= \Omega + \Delta\alpha. \end{aligned}$$

Tässä  $\Omega$  on satelliittiradan *nousevan solmun rektaskensio*.

Sekä pituusaste että rektaskensio  $\alpha$  (ja  $\Delta\alpha$ ) lasketaan positiiviseksi itäänpäin.

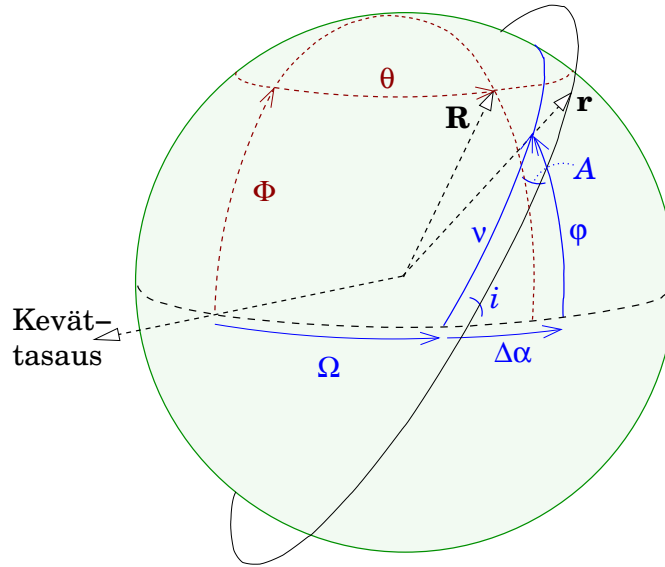
## 7.6 Satelliitin toposentriset koordinaatit

Yleensä satelliitin radan *korkeus*  $h$  on annettuna; sen määritelmän mukaan sen etäisyys maan keskipisteestä on

$$r = \|\mathbf{r}\| = a_e + h,$$

jossa  $a_e$  on maan ekvatoriaalisäde. Pallo-approksimaatiossa  $a_e = R$ . Silloin satelliitin suorakulmaiset, inertiaaliset koordinaatit ovat

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \alpha_G \\ r \cos \varphi \sin \alpha_G \\ r \sin \varphi \end{bmatrix},$$



Kuva 7.3: Satelliitin ja maa-aseman paikat inertiaalisessa järjestelmässä

jossa  $\varphi$  on satelliitin leveysaste (eli, jos näin halutaan sanoa, “geosentrinen deklinaatio”  $\delta_G$ ) ja  $\alpha_G$  geosentrinen rektaskensio.

Maa-aseman leveysaste olkoon  $\Phi$  ja sen pituusaste  $\Lambda$ ; silloin hetkellä  $t$  maa-aseman geosentrinen rektaskensio on

$$\theta = \Lambda + \tau + \theta_a,$$

jossa  $\tau$  on aika (UTC) ja  $\theta_a$  tähtiajan vuosiosuus. Tämä on sama kuin paikallinen tähtiaika, joka on siis on paikallisen meridiaanin orientaatio (inertiaalisessa) avaruudessa.

Nyt maa-aseman suorakulmaiset, inertiaaliset koordinaatit ovat

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R \cos \Phi \cos \theta \\ R \cos \Phi \sin \theta \\ R \sin \Phi \end{bmatrix}.$$

Vähentämällä saadaan:

$$\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} d \cos \delta_T \cos \alpha_T \\ d \cos \delta_T \sin \alpha_T \\ d \sin \delta_T \end{bmatrix},$$

josta saa ratkaistuksi *toposentriset koordinaatit*:

$$\tan \delta_T = \frac{d_3}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}, \quad \tan \alpha_T = \frac{d_2}{d_1}$$

Nämä ovat siis satelliitin rektaskensio ja deklinaatio nähtynä tähtitaivasta vasten. Tähtikartan ja kiikarin avulla voidaan nyt satelliittiä odottaa ja havaita.

Satelliitin *etäisyyttä* saadaan myös:

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}.$$

Etäisyyden avulla voidaan laskea satelliitin visuaalinen kirkkaus eli *magnitudi*. Etäisyydet ovat yleensä luokkaa 500-1000 km ja magnitudit 2-5.

## 7.7 Tietyn leveysasteen ylitys terrestrisessä järjestelmässä

Jos lasketaan terrestrisessä järjestelmässä, on oltava annettuna satelliitin ekvaattorin ylityksen *longitudi*  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 = \Omega - \theta_0$  ( $\tau_0$ ), jossa  $\theta_0$  on GAST ekvaattorin ylityshetkellä  $\tau_0$ .)

Aikaero  $\Delta\tau$  ekvaattorinylituksesta leveysasteeseen  $\Phi$  saadaan samalla tavalla; kuitenkin nyt lasketaan *longitudiero* seuraavasti:

$$\Delta\lambda = \Delta\alpha - \Delta\tau \cdot \omega,$$

jossa  $\omega$  on *maapallon pyöriädyksen kulmanopeus*, noin  $0.25^\circ$  minuutissa. Näin saadaan satelliitin pituusaste:

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda.$$

Sekä maa-aseman että satelliitin geosentriset koordinaatit voidaan myös kuvata *terrestrisessä järjestelmässä*. Tässä järjestelmässä maa-aseman koordinaatit ovat

$$\mathbf{R} = R \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{bmatrix}$$

ja satelliitin koordinaatit

$$\mathbf{r} = r \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Tästä taas saadaan *terrestrinen* toposentrisen vektorin:

$$\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} d \cos \delta_T \cos (\Lambda - t_T) \\ d \cos \delta_T \sin (\Lambda - t_T) \\ d \sin \delta_T \end{bmatrix},$$

josta voidaan ratkaista toposentriset deklinaatio  $\delta_T$  ja *tuntikulma*  $t_T$ .

Jos sitten halutaan rektaskensio tähtikartan kanssa käytettäväksi, ei ole tehtävä muuta kuin vähentää se paikallisesta tähtiajasta:

$$\alpha_T = \theta - t_T = (\theta_0 + \Lambda) + t_T = \theta_0 + (\Lambda - t_T).$$

Tässä  $\theta_0$  on Greenwichin tähtiaika ja  $(\Lambda - t_T)$  "Greenwichin tuntikulma".

## 7.8 Radan määrittäminen havainnoista

Mikäli satelliitin paikka taivaalla on havaittu kahtena eri ajan hetkenä  $\tau_1$  ja  $\tau_2$  – eli annettuna on  $(\alpha_1, \delta_1)$  ja  $(\alpha_2, \delta_2)$  – voimme laskea ensin toposentriset suuntavektorit (yksikkövektorit):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{d}_1}{d_1} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 \cos \alpha_1 \\ \cos \delta_1 \sin \alpha_1 \\ \sin \delta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{d}_2}{d_2} = \begin{bmatrix} \cos \delta_2 \cos \alpha_2 \\ \cos \delta_2 \sin \alpha_2 \\ \sin \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Kun myös maa-asemavektori  $\mathbf{R}$  on laskettu, voimme laskea  $d_1, d_2$  kosinissännöllä jos sopiva arvio<sup>1</sup> satelliitin korkeudelle  $h$  – tai vastaavasti, satelliitin radan säteelle  $r = R + h$  – on annettu:

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + d^2 + 2Rd \cos(\angle \mathbf{e}, \mathbf{R}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow d^2 + 2Rd \sin \eta + R^2 - r^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow d_{1,2} &= \frac{-2R \sin \eta \pm \sqrt{4R^2 \sin^2 \eta - 4(R^2 - r^2)}}{2} = \\ &= -R \sin \eta \pm \sqrt{r^2 - R^2 (1 - \sin^2 \eta)}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Kokenut havaitsija voi arvata satelliitin korkeutta sen kulkunopeudesta taivaalla yllättävän tarkasti.

jossa  $\sin \eta = \cos(\angle \mathbf{e}, \mathbf{R}) = \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_U \rangle$  on satelliitin suuntavektorin projektiio paikalliselle luotiviivalle, ja

$$\mathbf{e}_U = \frac{\mathbf{R}}{R} = \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \theta \\ \cos \Phi \sin \theta \\ \sin \Phi \end{bmatrix},$$

havaittajan “zeniittivektori”, yksikkövektori joka osoittaa suoraan ylöspäin. Arvo  $\sin \eta$ , elevaatiokulman siniarvo, on suoraan laskettavissa skalaaritulona  $\langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_U \rangle$  kun molemmat vektorit on annettuna suorakulmaisina.

Ainoastaan plussamerkinen ratkaisu on fysikaalisesti järkevä:

$$d = \sqrt{r^2 - R^2(1 - \sin^2 \eta)} - R \sin \eta.$$

Näin saadaan  $d_1, d_2$  ja siis  $\mathbf{d}_1 = d_1 \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{d}_2 = d_2 \mathbf{e}_2$ . Satelliitin nopeudeksi saadaan

$$v = \frac{\|\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1\|}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Kuitenkin tiedetään, mitä ympyrän muotoisen radan nopeus *pitäisi* olla korkeudella  $h$ : Keplerin kolmannen lain mukaan

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}(R+h)^3} \Rightarrow v_k = \frac{2\pi(R+h)}{P} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}.$$

Lasketaan valmiiksi seuraava pikku taulukko:

Korkeus (km)	500	750	1000	1500
Nopeus (m/s)	7612.609	7477.921	7350.139	7113.071

Näkyä, että satelliitin lineaarinen lentonopeus putoaa vain hitaasti korkeuden mukaan. Siksi voidaan käyttää “havaittu nopeus”  $v$  oletetun korkeuden  $h$  korjaamiseksi seuraavan kaavan mukaan:

$$h' = h \frac{v_k}{v},$$

jossa  $v_k$  on Keplerin mukainen nopeus (taulukosta arvolle  $h$ ),  $v$  laskettu nopeus, ja  $h'$  satelliitin korkeuden parannettu arvio. Tämä prosessi konvergoi jo yhdessä askeleessa melkein oikeaan korkeuteen.

*Huomauttakaan*, että näin saatu korkeus on elliptisen radan tapauksessa vain (likimäärin) “*ylilento* korkeutta”! Todellinen korkeus vaihtelee rataa pitkin. Samasta syystä saatu korkeus ei kelpaa periodin  $P$  (tai vastaavasti: radan pitkä akselipuolikkaan  $a$ ) laskemiseksi. Oikeaa periodia voidaan saada vain, jos satelliitti on saatu havaituksi ainakin parina peräkkäisenä päivänä.

Satelliitin laskettu paikkasiirtymävektori kahden havaintihetken välillä,  $\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  kertoo myös sen radan inkliinaatiosta, laskemalla sen vektoritulo vaikkapa satelliittin geosentrisen sijaintivektorin  $\mathbf{r}_1$  kanssa, seuraavasti:

$$(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \times \mathbf{r}_1 = \|\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1\| \|\mathbf{r}_1\| \cos i,$$

josta  $i$  voidaan ratkaista. Ja kun  $i$  ja satelliitin eräs “jalkapiste”  $(\varphi, \lambda)$  on tiedossa, on myös  $\Omega$  ja ( $P$ :n kanssa)  $\tau_0$  laskettavissa. Silloin voidaan jo generoida ennusteita!

Kun satelliitin korkeus (ja likimääräinen periodi) sekä inkliinaatio ovat tiedossa, voidaan laskea myös sen radan nousevan solmun nopeaa prekessioliikettä<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>Kaava pätee ympyrän muotoiselle radalle.

$$\begin{aligned}\Omega(\tau) &= \Omega(\tau_0) - (\tau - \tau_0) \frac{d\Omega}{d\tau} = \\ &= \Omega(\tau_0) - (\tau - \tau_0) \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 J_2 \cos i,\end{aligned}$$

jossa  $J_2$  on maapallon *dynaaminen litistyneisyys*, arvo  $J_2 = 1082.62 \cdot 10^{-6}$ . Satelliittikauden ensimmäisinä saavutuksina oli  $J_2$ :n tarkka määrittäminen<sup>3</sup>. Numeerisena kaavana:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = -6.52927 \cdot 10^{24} \frac{\cos i}{a^{3.5}} \text{ [m}^{3.5} \text{ aste/vuorokausi]}$$

(huomaa yksikkö!) Näin saadaan seuraava taulukko (yksikkönä aste/vuorokausi):

Kork./Inkl.	500	750	1000	1500
0°	-7.651	-6.752	-5.985	-4.758
56°	-4.278	-3.776	-3.347	-2.661
65°	-3.233	-2.854	-2.529	-2.011
74°	-2.109	-1.861	-1.650	-1.311
81°	-1.197	-1.056	-0.936	-0.744
90°	0	0	0	0
0.9856	97°.401	98°.394	99°.478	101°.955

Taulukossa viimeinen rivi on erikoinen. Arvo 0.9856 aste/vuorokausi on *auringon näennäinen kulmanopeus* tähtitaivasta vasten. Jos satelliitin ratatason prekessionopeutta säädetään tämän arvoiseksi, lentää satelliitti aina saman alueen yli samaan paikalliseen aurinkoaikaan. Tällä tavoin saavutetaan ns. heliostationaarinen rata, myös “no-shadow” rata, jonka etuina on jatkuva valo aurinkokennoille, ja kaukokartoituksessa aina sama auringon korkeuskulma kuvatessa Maan pintaa. Annettuna on inkliinaatiokulma joka jokaiselle taulukon sarakkeen keskikorkeusarvolle antaa juuri sellaisen aurinkostationaarisen radan. Satelliittin ratatason prekessionopeus *aurinkoon nähden* on nyt

$$q \equiv \frac{d\Omega}{d\tau} - 0.9856 \text{ aste/vuorokausi}$$

Esimerkiksi, satelliitille jonka korkeus on 500 km ja inkliinaatio 56°:

$$q = -4.278 - 0.9856 = -5.2636 \text{ aste/vuorokausi},$$

ja yhden kierron periodi on  $360/q = 68$  vuorokautta  $\approx 2.2$  kuukautta. Tämä on aikaväli, jonka jälkeen satelliitti tulee taas näkyviin esim. saman leveysasteen iltataivaalle.

<sup>3</sup>Itse asiassa tämän nousevan solmun liike on niin suuri, että ilman sen huomioon ottamista järkevien rataenusteiden generoiminen on mahdotonta.



## 8 Gaußin pintateoria

Carl Friedrich GAUSS<sup>1</sup> oli ensimmäisten joukossa, jotka kehittivät kaarevien pintojen teoriaa. Hänen kehittämänsä teoria vielä oletti, että kaksiulotteinen pinta on kolmiulotteisen avaruuden sisällä – monet derivoinnit ovat silloin yksinkertaisia ja kuitenkin teoria soveltuu sellaisenaan Maan kaarevaan pintaan: Gaußhan oli geodeetti, joka mittasi ja laski Hannoverin ja Braunschweigin geodeettiset verkot pienimmän neliösumman menetelmää käyttäen.

Annettuna kaareva pinta  $S$  kolmiulotteisessa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Pinta *parametrisoidaan* parametreilla  $(u, v)$ . Esimerkiksi: Maan pinta, parametrizointi  $(\varphi, \lambda)$ .

Avaruuden piste on

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

### 8.1 Avaruuskäyrä

Avaruudessa kulkeva käyrä  $C$  voidaan parametrizoida parametrilla  $s$ . Silloin käyrän pisteet ovat

$$\mathbf{x}(s).$$

Jos parametrille pätee, että

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

sanotaan, että  $C$  on *parametrizoitu matkan* (tai kaaripituuden) *mukaan*..

#### Esimerkkejä:

1. Mittanauhan lukemat muodostavat parametrizoinnin matkan mukaan.
2. Kun ajaa tietä pitkin, matkamittarin lukemat muodostavat tien parametrizoinnin matkan mukaan.
3. Mannerheimintiellä *kkj*-koordinaatti  $x$  muodostaa parametrizoinnin, *ei* kuitenkaan matkan mukaan (koska tien suunta on vaihteleva).

Oletetaan jatkossa, että käytetty parametrizointi on yksiselitteinen ja differentioitava (ja siis jatkuva).

Kaaren  $C$  tangentti *saadaan differentioimalla*:

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{x}_s;$$

tangentin pituus on

$$\|\mathbf{t}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Tämä pätee *vain* jos  $s$  on matkan mukainen parametrizointi.

<sup>1</sup>Carl Friedrich Gauß, (1777 – 1855), oli myös ensimmäisinä jotka miettivät epä-eukliidisen geometrian mahdollisuutta. Muut olivat János Bolyai ja Nikolai I. Lobachevsky.

Mielivaltainen parametrisointi  $t$  voidaan aina muuntaa matkan mukaiseksi parametrisoinniksi seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \frac{ds}{d\tau} d\tau = \int_0^t \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{d\tau} d\tau = \\ &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} d\tau, \end{aligned} \quad (8.1)$$

eli differentiaalimuodossa

$$ds = dt \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2},$$

josta  $s(t)$  voidaan aina laskea integroimalla 8.1.

Uudelleen differentiointi antaa käyrän *kaarevuusvektori*:

$$\mathbf{k}(s) = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{x}(s).$$

## 8.2 Ensimmäinen perusmuoto (metriikka)

*Gaußin ensimmäinen perusmuoto (first fundamental form):*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (8.2)$$

$ds$  on *matka-elementti* pinnan sisällä.

Myöhemmin tullaan näkemään, että tämä perusmuoto on sama kuin tarkastellun pinnan *metriikka*, ja vaihtoehtoinen kirjoitustapa on

$$ds^2 = g_{11}du^2 + g_{12}dudv + g_{21}dvdu + g_{22}dv^2.$$

Jos piste  $\mathbf{x}$  on pinnan  $S$  sisällä, voidaan *derivoida* sen koordinaatit:

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial u \\ \partial y / \partial u \\ \partial z / \partial u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial v \\ \partial z / \partial v \end{bmatrix}.$$

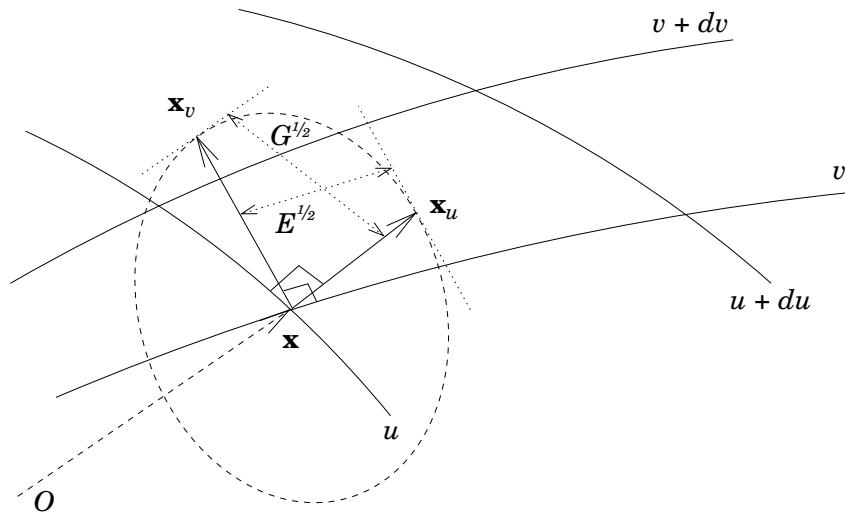
Nämä vektorit kutsutaan pinnan  $S$  ja parametrisoinnin  $(u, v)$  *tangenttivektoreiksi*.

Näin kirjoitettuna *perusmuodon alkiot*:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Kuvassa 8.1 on kuvattu Gaußin ensimmäinen perusmuoto ja tangenttivektorit  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ . On helppoa näyttää (ketjusääntö kolmessa ulottuvuudessa  $(x, y, z)$ ), että

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \right] du^2 + \\ &+ 2 \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right) \right] dudv + \\ &+ \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right] dv^2 = \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) du^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) dudv + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) dv^2, \end{aligned}$$



Kuva 8.1: Gaussin ensimmäinen perusmuoto

josta (8.2) suoraan seuraa.

Näemme esimerkiksi, että  $v$ -käyrien suunnassa ( $dv = 0$ ):

$$ds^2 = E du^2,$$

eli  $E$  edustaa *metristä matkaa* kahden peräkkäisen  $(u, u + 1)$  käyrän välillä. Samoin  $G$  edustaa matkaa kahden peräkkäisen  $v$ -käyrän välillä. Miten lähempänä käyrät toisilleen, sitä suurempaa  $\mathbf{x}_u$  tai  $\mathbf{x}_v$  ja myös sitä suurempaa  $E$  tai  $G$ .  $F$  taas edustaa  $u$ - ja  $v$ -käyristöjen välinen *kulma*: se häviää jos kulma on suora.

### 8.3 Toinen perusmuoto

*Normaali* pinnan päällä on vektori, joka on kohtisuora jokaista käyrää kohtaan, joka kulkee pinnassa, myös  $u$ - ja  $v$ -käyrät. Kirjoitetaan

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}.$$

Ilmeisesti

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = 0. \quad (8.3)$$

Vaaditaan myös

$$\|\mathbf{n}\| = 1,$$

eli

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Differentioidaan  $\mathbf{x}$  toista kertaa:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u \partial v}, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Nyt Gaußin toinen perusmuoto (*second fundamental form*) on

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

jossa

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \\ f &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \\ g &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ehdon (8.3) perusteella on myös

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u) = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uu} \Rightarrow e = -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_u, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u) = \mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uv} \Rightarrow f = -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_u, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v) = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uv} \Rightarrow f = -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v) = \mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vv} \Rightarrow g = -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_v. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Katso kuva 8.2. Kun siirrytään paikasta toiseen, muuttuu normaalivektorin suunta: kun siirrytään pisteestä  $\mathbf{x}(u, v)$  pisteelle  $\mathbf{x}'(u + du, v)$ , muuttuu normaali  $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}' = \mathbf{n} + d\mathbf{n}'$ . Samoin, kun siirrytään pisteestä  $\mathbf{x}$  pisteeseen  $\mathbf{x}'(u, v + dv)$ , normaali muuttuu  $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'' = \mathbf{n} + d\mathbf{n}''$ .

Kaavana:

$$d\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} dv = \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv.$$

Normaalivektorin normi eli pituus on aina 1, kuten yllä nähtiin; siksi vektorin muuttuminen voi tapahtua vain kahteen suuntaan, joko tangenttivektorin  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}$ , tai tangenttivektorin  $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}$ , suuntaan.

Erotetaan ne *projisoimalla*:

$$\begin{aligned} d\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u &= \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_u du + \mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_u dv, \\ d\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v &= \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v du + \mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_v dv, \end{aligned}$$

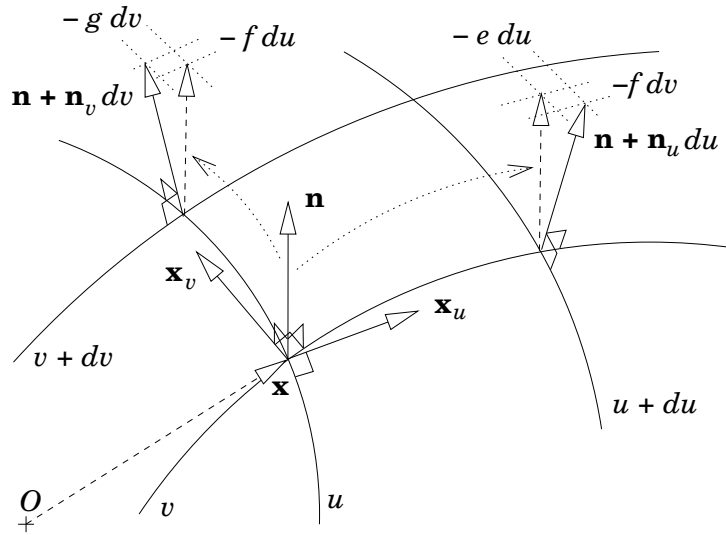
joista voidaan toisen perusmuodon elementit  $e, f, g$  suoraan identifioida (8.5):n avulla:

$$\begin{aligned} -d\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u &= edu + f dv, \\ -d\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v &= f du + g dv. \end{aligned}$$

Toisin kuin ensimmäinen perusmuoto, toiselle perusmuodolle ei ole olemassa vastaava objekti Riemannin pintateoriassa. Se on olemassa vain pinnoille, jotka ovat *upoksissa* ympäröivässä (euklidisessa) avaruudessa.

Usein löytyy myös “tensoriaalinen” kirjoitustapa:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= e, \\ \beta_{12} = \beta_{21} &= f, \\ \beta_{22} &= g. \end{aligned}$$



Kuva 8.2: Gaußin toisen perusmuodon geometrinen selostus

## 8.4 Kolmas perusmuoto

Gaußin toinen perusmuoto kuvaa tavallaan pinnan kaarevuutta avaruudessa, kuvaamalla miten normaalivektorin suunta muuttu, kun kuljeskellaan joko  $u$ - tai  $v$ -koordinaattiviivojen suunnassa. Valitettavasti tämä ei riitä kaarevuuden *absoluuttiseen* kuvaamiseen, koska parametrisointi  $(u, v)$  on

1. mielivaltainen valinta, ja
2. ei ole metrisesti skaalattu.

Viimeinen tarkoittaa, että jos normaalivektorin  $\mathbf{n}$  suunta muuttuu  $d\mathbf{n}$  verran, kun kuljeskellaan matkan  $du$  verran  $v$ -koordinaattiviivaa pitkin, me emme vielä tiedä *monenko metrin matkaan  $du$  vastaa*. Jos se on pitkä matka, niin sama normaalivektorin muutos  $d\mathbf{n}$  merkitsee vain pieni pinnan kaarevuus; jos se on lyhyt matka, sama muutos  $d\mathbf{n}$  vastaa suureen pinnan kaarevuuteen.

Se, että parametriviivat  $u = \text{vakio}$  ja  $v = \text{vakio}$  eivät yleisesti ole kohtisuoria keskenään, tekee ongelmasta vielä monimutkaisemmaksi.

Tästä syystä keksittiin *kolmas Gaußin perusmuoto*. Se saadaan kirjoittamalla ensimmäinen ja toinen matriisiin muotoon:

$$H = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

ja muodostamalla:

$$\begin{aligned} C \equiv BH^{-1} &= \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fE - eF \\ fG - gF & gE - fF \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Voitaisiin sanoa, että kertominen  $A$ -matriisiin eli *matka-elementin pituutta kuvaavan* ensimmäisen perusmuodon käänteismatriisiin kanssa suorittaa  $B$ -matriisiin *metrinen skaalaus*<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Teknisempi kuvaus:  $B$  on kovariantti tensori  $\beta_{ij}$ , ja  $A$  kovariantti metrinen tensori  $g_{ij}$ .  $A^{-1}$  taas vastaa kontravarianttiin tensoriin  $g^{ij}$ .  $C$  on nyt "sekätensori"  $\beta_k^i = g^{ij}\beta_{jk}$ , jonka *tensoriaalinen ominaisarvotehtävä* on

$$(\beta_j^i - \kappa\delta_j^i)x^j = 0,$$

sama kaava kuin (8.6).

Ks. luku 9.

Matriisilla  $C$  on *kaksi ominaisarvoa*: arvot  $\kappa_{1,2}$  joille

$$(C - \kappa I) \mathbf{x} = 0 \quad (8.6)$$

sopivalle arvoparille  $\mathbf{x} = [ du \ dv ]^T$ . Ratkaisut  $\kappa_{1,2}$  kutsutaan pinnan  $S$  *pääkaarevuksiksi*. Ne ovat *invariantteja* valitun parametrisoinnin  $(u, v)$  suhteen. Vastaavat arvoparit  $\mathbf{x}_1 = [ du_1 \ dv_1 ]^T$  ja  $\mathbf{x}_2 = [ du_2 \ dv_2 ]^T$  määrittävät paikalliset *pääkaarevuussuunnat* pinnalla.

Muut invariantit:

1. Tulo  $\kappa_1 \kappa_2 = \det C = \frac{\det B}{\det H} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$  on *Gaußilainen kaarevuus*.
2. Puolisumma  $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$  on *keskikaarevuus*.

### Esimerkki:

Ellipsoidisen Maan pinnan pisteen koordinaatit ovat

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} N(\varphi) \cos \varphi \cos \lambda \\ N(\varphi) \cos \varphi \sin \lambda \\ N(\varphi) (1 - e^2) \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Tästä

$$\mathbf{x}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \cos \lambda \frac{d}{d\varphi} (N(\varphi) \cos \varphi) \\ \sin \lambda \frac{d}{d\varphi} (N(\varphi) \cos \varphi) \\ (1 - e^2) \frac{d}{d\varphi} (N(\varphi) \sin \varphi) \end{bmatrix};$$

Käyttämällä liitteessä B johdetut kaavat saadaan:

$$\mathbf{x}_\varphi = M(\varphi) \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ +\cos \varphi \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} = N(\varphi) \begin{bmatrix} -\cos \varphi \sin \lambda \\ +\cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pintanormaali saadaan vektoritulona, normalisoituna:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_\lambda}{\|\mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_\lambda\|},$$

jossa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_\lambda &= NM \begin{bmatrix} -\cos^2 \varphi \cos \lambda \\ -\cos^2 \varphi \sin \lambda \\ -\sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \lambda - \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \lambda \end{bmatrix} = \\ &= -NM \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \cos \lambda \\ \cos^2 \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \cos \varphi \end{bmatrix} = -NM \cos^2 \varphi \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ \tan \varphi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jonka normi on

$$\|\mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_\lambda\| = NM \cos^2 \varphi \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = NM \cos \varphi.$$

Siis

$$\mathbf{n} = - \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix},$$

ei yllättävä tulos...

Lasketaan ensimmäinen perusmuoto:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\varphi = M^2 (\sin^2 \varphi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) + \cos^2 \varphi) = M^2, \\ F &= \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\lambda = 0, \\ G &= \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\lambda = N^2 \cos^2 \varphi = p^2. \end{aligned}$$

Toista perusmuotoa varten lasketaan

$$\mathbf{n}_\varphi = \begin{bmatrix} +\sin \varphi \cos \lambda \\ +\sin \varphi \sin \lambda \\ -\cos \varphi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}_\lambda = \begin{bmatrix} +\cos \varphi \sin \lambda \\ -\cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

ja näin (kaavat 8.5)

$$\begin{aligned} e &= -\mathbf{n}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\varphi = +M, \\ f &= -\mathbf{n}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\lambda = -\mathbf{n}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\varphi = 0, \\ g &= -\mathbf{n}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\lambda = +N \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Eli:

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & N^2 \cos^2 \varphi \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \cos^2 \varphi \end{bmatrix}, \text{ ja} \\ C &= BH^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pääkaarevuudet  $\kappa_{1,2}$  ovat  $C$ :n ominaisarvot, ominaisarvottehtävän

$$(C - \kappa I) \mathbf{x} = 0$$

ratkaisuja; arvot saadaan ratkaisemalla

$$\begin{aligned} \det(C - \kappa I) = 0 &\Rightarrow \det \begin{bmatrix} \frac{1}{M} - \kappa & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} - \kappa \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \frac{1}{M} - \kappa \right) \left( \frac{1}{N} - \kappa \right) = 0 \Rightarrow \kappa_1 = \frac{1}{M}, \kappa_2 = \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Kuten oli odotettavissa...

## 8.5 Käyrä pinnan sisällä

Jos käyrä  $C$  kulkee kaarevan pinnan sisällä, voidaan tutkia muita mielenkiintoisia asioita.

### Tangenttivektori

Jos kutsutaan<sup>3</sup>  $t^i = \begin{bmatrix} t^1 \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du/ds \\ dv/ds \end{bmatrix}$  "vektorin  $\mathbf{t}$  komponentit  $(u, v)$ -koordinaatistossa", tämä on  $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{du} \frac{du}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{dv} \frac{dv}{ds} = t^1 \mathbf{x}_u + t^2 \mathbf{x}_v$ . Eli käyrän tangentti on myös pinnan eräs tangentti ja sijaitsee tangenttitason sisällä.

<sup>3</sup>Älä hermostus yläindeksin käytöstä. Se on vain kirjoitustapa ja sen järjestyttä perustellaan myöhemmin.

## Kaarevuusvektori

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d}{ds} (t^1 \mathbf{x}_u + t^2 \mathbf{x}_v) = \\ &= \mathbf{x}_u \frac{dt^1}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dt^2}{ds} + \\ &+ \mathbf{x}_{uu} (t^1)^2 + 2\mathbf{x}_{uv} t^1 t^2 + \mathbf{x}_{vv} (t^2)^2.\end{aligned}$$

Eli “kaarevuusvektorin komponentit  $(u, v)$ -koordinaatistossa” sisältävät jotain muutakin kuin vain komponenttilukujen derivaatat  $dt^1/ds$  ja  $dt^2/ds$ .

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n};\end{aligned}\tag{8.7}$$

eli ripustetaan kolmiulotteiset vektorit avaruuden kantaan  $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n})$ .

Tässä esiintyvät — eli luonnollisesti nousevat esille —  $\Gamma$ -symbolit eli “Christoffelin symbolit” käsitellään myöhemmin (luku 9). Ne kuvaavat vain sitä tosiasiaa, että *vektorin differentioiminen* (eli “rinnakkaiskuljetus”, ks. luku 9) kaarevan pinnan käyräviivaisissa koordinaateissa ei ole triviaali asia.

Kolmas termi oikealla puolella kuitenkin edustaa määritelmän (8.4) mukaan *toisen perusmuodon alkioita*  $e, f, g$ .

Saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \left( \frac{dt^1}{ds} + \Gamma_{11}^1 (t^1)^2 + 2\Gamma_{12}^1 t^1 t^2 + \Gamma_{22}^1 (t^2)^2 \right) \mathbf{x}_u + \\ &+ \left( \frac{dt^2}{ds} + \Gamma_{11}^2 (t^1)^2 + 2\Gamma_{12}^2 t^1 t^2 + \Gamma_{22}^2 (t^2)^2 \right) \mathbf{x}_v + \\ &+ \left( e (t^1)^2 + 2ft^1 t^2 + g (t^2)^2 \right) \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Tässä ensimmäiset kahdet termit edustavat käyrän  $C$  *sisäistä kaarevuutta*  $\mathbf{k}_{int}$ , kaarevuus pinnan  $S$  sisällä; viimeinen termi edustaa *ulkoista kaarevuutta*  $\mathbf{k}_{ext}$ , käyrän kaartumista itse kaarevan “pinnan mukaan”.

Sisäisellä kaarevuudella on taas kaksi komponenttia “ $(u, v)$ -koordinaateissa”, joita saadaan luke-  
malla ylläolevasta kaavasta. Kirjoitetaan

$$\mathbf{k}_{int} = k^1 \mathbf{x}_u + k^2 \mathbf{x}_v,$$

jossa

$$\begin{aligned}k^i &= \begin{bmatrix} k^1 \\ k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dt^1/ds + \Gamma_{11}^1 (t^1)^2 + 2\Gamma_{12}^1 t^1 t^2 + \Gamma_{22}^1 (t^2)^2 \\ dt^2/ds + \Gamma_{11}^2 (t^1)^2 + 2\Gamma_{12}^2 t^1 t^2 + \Gamma_{22}^2 (t^2)^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} dt^1/ds + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^1 t^i t^j \\ dt^2/ds + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^2 t^i t^j \end{bmatrix},\end{aligned}$$

jossa olemme “taloudellistaneet” kaavat käyttämällä summausmerkkiä. Ulkoinen kaarevuus taas on

$$\mathbf{k}_{ext} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n},$$

jossa

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = e (t^1)^2 + 2ft^1 t^2 + g (t^2)^2.$$

**Esimerkki:** leveyspiiri maan pinnalla.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} N(\varphi) \cos \varphi \cos \lambda \\ N(\varphi) \cos \varphi \sin \lambda \\ N(\varphi) (1 - e^2) \sin \varphi \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \begin{bmatrix} -N \cos \varphi \sin \lambda \\ +N \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{N \cos \varphi} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ +\cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \begin{bmatrix} -\cos \lambda \\ -\sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{N \cos \varphi}.$$

Ulkoista kaarevuutta:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix},$$

siis

$$\mathbf{k}_{ext} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \frac{1}{N} (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{n}}{N}.$$

Koska vektori  $\mathbf{n}$  on yksikkövektori, voimme päätellä, että käyrän ulkoinen kaarevuus on juuri poikittaiskaarevuussäteen käänteisluku, ja sisäänpäin suuntautunut. Se on sama kuin pinnan kaarevuus käyrän kulkusuunnassa.

Sisäinen kaarevuus on

$$\mathbf{k}_{int} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_{ext} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} -\frac{\cos \lambda}{\cos \varphi} + \cos \varphi \cos \lambda \\ \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi} + \cos \varphi \sin \lambda \\ +\sin \varphi \end{bmatrix} = \frac{\tan \varphi}{N} \begin{bmatrix} -\cos \lambda \sin \varphi \\ -\sin \lambda \sin \varphi \\ +\cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Tämän vektorin pituudeksi saadaan

$$\|\mathbf{k}_{int}\| = \frac{\tan \varphi}{N}.$$

Kuvassa 8.3 näkyy kaarevuusvektori  $\mathbf{k}$ , pituus  $k = \frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{p(\varphi)}$ ; sen sisäinen osa

$\mathbf{k}_{int}$ , pituus  $k \sin \varphi = \frac{1}{p(\varphi)} \sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{N(\varphi)}$ ; ja sen ulkoinen osuus  $\mathbf{k}_{ext}$ , pituus  $k \cos \varphi = \frac{1}{p(\varphi)} \cos \varphi = \frac{1}{N(\varphi)}$ . Kuvassa näkyy myös miten itse etäisyys Maan pyörähdyksensä akseliin on jokaisessa suunnassa ( $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_{int}$  ja  $\mathbf{k}_{ext}$ ) kaarevuuden käänteisluku. Tämä on myös intuitiivisesti selvä pyörähdyssymmetriasta.

## 8.6 Geodeettinen viiva

### Sisäisesti, pintakoordinaateissa

Geodeettisen viivan kaavaa saadaan vaatimalla  $\mathbf{k}_{int} = k^i = 0$ , eli käyrällä *ei ole sisäistä kaarevuutta* (ulkoista kaarevuutta ei saada poistetuksi kun käyrä on kaarevassa pinnassa):

$$\frac{dt^i}{ds} + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{jk}^i t^j t^k = 0. \quad (8.8)$$



**Esimerkki:** ellipsoidisella Maan pinnalla on

$$\begin{aligned} H^{-1}BH^{-1} &= \begin{bmatrix} M^{-2} & \\ & N^{-2} \cos^{-2} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & \\ & N \cos^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-2} & \\ & N^{-2} \cos^{-2} \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} M^{-3} & \\ & N^{-3} \cos^{-2} \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/M^3 & \\ & \cos \varphi / p^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_u \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_N) \\ p (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_E) \end{bmatrix},$$

joista saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \begin{bmatrix} \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_N & \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/M & \\ & \cos \varphi / p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_N \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_E \end{bmatrix} \mathbf{n} = \\ &= \left\{ \frac{1}{M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_N)^2 + \frac{1}{N} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_E)^2 \right\} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Tässä yksikkövektorit

$$\mathbf{e}_N = \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_E = \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \sin \lambda \\ +\cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lähestymistapa on geometrisesti intuitiivinen. Aaltosuluissa oleva ilmaisu  $\frac{1}{M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_N)^2 + \frac{1}{N} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_E)^2 = \frac{1}{M} \cos^2 A + \frac{1}{N} \sin^2 A$  on juuri *geodeettisen viivan suuntainen pinnan kaarevuus*.

Tämän lisäksi meillä on yhtälöt  $\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{t}$ , yhteensä  $2 \times 3 = 6$  tavallista differentiaaliyhtälöä.

Avaruusvektorimenetelmällä on sekä *edut* että *haitat* pintakoordinaattimenetelmän (esim. kaavat (2.1)) verrattuna.

**Et:** pintakoordinaateissa  $(\varphi, \lambda)$  on välttämättä aina kaksi *napaa*, singulariteetteja joissa leveyspiirien kaarevuus menee äärettömyyteen ja numeeriset menetelmät voivat käyttäytyä huonosti. Näin ei tapahdu suorakulmaisissa avaruuskoordinaateissa.

**Haittoja:**

1. Enemmän yhtälöitä, enemmän laskentatyötä.
2. Jokaisessa pisteessä on laskettava  $M$  ja  $N$  ja niitä varten  $\varphi = \arctan \frac{Z}{(1-e^2)p}$ , jossa  $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .
3. Viivan laskennan "sisään- ja ulosrullaus" edellyttää  $(\varphi, \lambda)$ :n muuntaminen  $(X, Y, Z)$ -koordinaateiksi alkupisteessä ja takaisin loppupisteessä.



## 9 Riemannin pintateoria

Tärkeä teoreettinen raami, jossa kaarevat pinnat ja käyrät usein kuvataan, on *Riemannin*<sup>1</sup> *pintateoria*. Tässä teoriassa tutkitaan kaareva pinta *sisäisesti*, ts. ilman sen seikan huomioon ottamista, että Maan kaareva pinta on kokonaisen kolmiulotteisen (euklidisen) avaruuden “upoksisissa”.

Tämä tekee Riemannin pintateoriasta käyttökelpoinen abstraktio myös tilanteissa, jossa tämä ympäröivä korkeampiulottuvainen avaruus ei välttämättä ole edes olemassa. Esimerkiksi yleisessä suhteellisuusteoriassa kuvataan aika-avaruutta  $(x, y, z, t)$  kaarevana Riemannin teorian mukaisena jatkumona, jonka kaarevuuden parametrit liitetään massa- ja virtaustiheyteen EINSTEIN<sup>2</sup>in kenttäyhtälöiden kautta. Painovoimakenttä on tämän kaarevuuden ilmentymä.

### 9.1 Mikä on tensori?

Fysiikassa enemmän kuin geodesiassa tulee usein vastaan käsite “tensori”. Mikä tensori on?

#### Vektorit

Ensin *vektori*. Tässä aluksi tutkitaan tilannetta kaksiulotteisessa euklidisessa avaruudessa eli *tasossa*.

Kahden viereisen pisteen välinen koordinaattieropari on vektori:

$$\mathbf{v} = v^i = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

on vektori, kirjoitettuna yläindeksillä.

Toisessa koordinaatistossa tämä vektori kirjoitetaan

$$\mathbf{v} = v^{i'} = \begin{bmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että tässä on sekä symbolinen kirjoitustapa ( $\mathbf{v}$ ) että komponenttikirjoitustapa ( $v^i$ ,  $i = 1, 2$ ). Komponentit riippuvat valitusta koordinaatistosta ( $\Delta x' \neq \Delta x$ ,  $\Delta y' \neq \Delta y$ , vaikka aina  $\Delta x^2 + \Delta y^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = \text{vakio}$  — *invariantti*), mutta symbolinen kirjoitustapa on riippumaton siitä. Vektori on aina sama, vaikka sen komponentit muuntuvat koordinaatiston mukaan. Vektori on aina sama “nuoli avaruudessa”.

Vektorin komponenttien muuttamiseksi on olemassa seuraava muunnoskaava:

$$v^{i'} = \sum_i \alpha_i^{i'} v^i, \quad (9.2)$$

tai “matriisikielellä”

$$\mathbf{v}' = A\mathbf{v},$$

<sup>1</sup>Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826 – 1866), saksalainen matemaatikko

<sup>2</sup>Albert EINSTEIN, 1879-1955, saksalaissyntyinen teoreettinen fyysikko, suhteellisuusteorian keksijä ja tieteen ikoni.

jossa

$$\mathbf{v} = v^i = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} \left( = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \right)$$

on komponenttien muodostama sarakematriisi, ja

$$A = \alpha_i^{i'} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} \left( = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right)$$

on muunnosoperaattorin komponenttimatriisi.

Jokainen suure, joka muuntuu kaavan (9.2) mukaan, kutsutaan *vektoriksi*. Tutut vektorisuureet ovat nopeus, kiihtyvyys, voima, . . . yhteistä niissä on, ette ne voidaan esittää graafisesti *nuoleina*.

## Tensorit

*Tensori* on nyt vain neliskanttinen objekti — matriisi — jolla on samanlainen muunnosominaisuus koordinaatistosta toiseen, mutta *jokaisen indeksin kohdalla*:

$$T^{i'j'} = \sum_{i,j} \alpha_i^{i'} \alpha_j^{j'} T^{ij}.$$

”Matriisikielellä” tämä on<sup>3</sup>

$$T' = A^T T A,$$

jossa A on sama kuin yllä määritetty.

Olemme jo tavanneet geodeettisessa teoriassa monet tensorit:

1. Maapallon inertiatensori.
2. Painovoiman gradienttitensori eli *Marussi-tensori*

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{bmatrix}.$$

3. Varianssi”matriisi” on oikeastaan tensori:  $\text{Var}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$ , jossa  $\sigma_x$  ja  $\sigma_y$  ovat koordinaattien eli x-komponenttien keskivirheet, ja  $\sigma_{xy}$  kovarianssi.
4. Edellisessä Gaußin pintateorian ensimmäinen  $H = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ , toinen  $B = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$  ja kolmannenkin perusmuodot;
5. Myös karttaprojektion perusmuodon alkio  $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$  muodostuvat tensorin  $\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix}$ ,

jonkinlainen metrinen tensori. Objekti  $H^{-1} \tilde{H} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E}}{M^2} & \frac{\tilde{F}}{Mp} \\ \frac{\tilde{F}}{Mp} & \frac{\tilde{G}}{p^2} \end{bmatrix}$  taas voitaisiin kutsua *mittakaavatensoriksi*.

<sup>3</sup>Verifioi, että matriisikaava johtaa samoihin indeksisummauksiin kuin indeksikaava!

## Tensorin geometrinen esitys ja invariantit

Samalla tavalla kuin *vektorin* geometrinen kuvaus on *nuoli*, on *tensorin* geometrinen kuvaus *ellipsi* (kaksiulotteisesti) tai *ellipsoidi* (kolmiulotteisesti). Ellipsin/ellipsoidin pääakselien pituudet kuvaavat tensorin ominaisarvot<sup>4</sup>; pääakselien suunnat taas ovat tensorin ominaisvektorien suuntia.

Euklidisessa avaruudessa ja suorakulmaisissa peruskoordinaatistoissa tensorit  $T^{ij}$  tapaavat olemaan *symmetrisia*; siksi eri ominaisarvoihin  $\lambda_i, \lambda_j, i \neq j$  kuuluvat ominaisvektorit  $x_i, x_j$  ovat kohtisuoria toisinsa kohtaan, kuten matematiikan oppikirjoissa todistetaan.

$n$ -ulotteisessa avaruudessa tensorilla  $T$  on  $n$  riippumatonta invarianttia. Ominaisarvot  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  ovat tietenkin invariantteja. Niin onkin niiden *summa* ja *tulo*.

$$\sum_i \lambda_i = \sum_i T^{ii},$$

kaksiulotteisella pinnalla

$$\lambda_1 + \lambda_2 = T^{11} + T^{22},$$

lävistäjä-alkioiden summa eli *jälki*<sup>5</sup>; ja

$$\prod_i \lambda_i = \det(T),$$

kaksiulotteisella pinnalla taas

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(T) = T^{11}T^{22} - T^{12}T^{21},$$

tensorin *determinantti*.

Varianssimatriisin jälki  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$  tunnetaan jo *pistevarianssina*  $\sigma_P^2$ ; se valittiin juuri siksi, koska se on invariantti, siis riippumaton  $xy$ -akselien suunnasta. Myös painovoimagradienttitenorin jälki on tuttu:

$$\sum_i M_{ii} = \frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial z^2} \equiv \Delta W,$$

LAPLACE-operaattori.

## Tensorit yleisessä koordinaatistossa

Entä sitten *ei-euklidisessa avaruudessa, ei-suorakulmaisissa koordinaatistoissa*? No, siinä tapauksessa ero ylä- ja ala-indeksien välillä tulee merkitykselliseksi ja yläindeksien kirjoitustapa saa vihdoinkin oikeutuksensa.

*Kontravariantti vektori* muuntuu seuraavasti:

$$v^{i'} = \sum_i \alpha_i^{i'} v^i \quad (9.3)$$

ja *kovariantti vektori* seuraavasti:

$$v_{i'} = \sum_i \alpha_{i'}^i v_i. \quad (9.4)$$

(Hyvin samanlaisen näköisiä, mutteivät samoja!)

Kun kontravariantin vektorin "prototyyppi" on kahden (läheisen) pisteen koordinaattierot, kuten yllä:

$$v^i = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix},$$

<sup>4</sup>Tarkemmin, akselien puolikkaiden pituudet ovat ominaisarvojen  $\lambda_i$  neliöjuuret.

<sup>5</sup>En. *trace*, saks. *Spur*.

on kovariantin vektorin prototyyppi *gradienttioperaattori*:

$$v_j = \frac{\partial V}{\partial x^j} = \begin{bmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

$V(x, y)$  on joku skalaarikenttä avaruudessa.

Jos otetaan mallivektoriksi

$$v^i = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix},$$

saadaan

$$v^{i'} = \begin{bmatrix} dx' \\ dy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x' / \partial x & \partial x' / \partial y \\ \partial y' / \partial x & \partial y' / \partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix};$$

myös ketjusäännöllä

$$\begin{bmatrix} \partial V / \partial x' \\ \partial V / \partial y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial x' & \partial x / \partial y' \\ \partial y / \partial x' & \partial y / \partial y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \end{bmatrix}.$$

Kerronmatriisit  $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \alpha_i^{i'}$  ja  $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \alpha_{i'}^i$  ovat ilmeisesti *toistensa käänteismatriiseja*.

Siis, jos kovariantin muunnoskaavan (9.4) muunnosparametrien  $\alpha_i^{i'}$  matriisiesitys on  $A$  ( $i$  rivi- ja  $i'$  sarakeindeksi), on kontravariantin muunnosparametrien (kaava 9.3)  $\alpha_{i'}^i$  matriisi  $A^{-1}$  ( $i'$  rivi- ja  $i$  sarakeindeksi). Tästä seikasta nimitykset “kovariantti” ja “kontravariantti” juontavat juurensa.

Tensoreilla voi olla sekä ylä- että ala-indeksejä. Koordinaatiston vaihdossa jokainen indeksi muuntuu “luonteensa” mukaisesti. Tensorin ei välttämättä edes tarvitse olla vain kaksi indeksiä, niitä voi olla enemmänkin.

### “Triviaalit” tensorit

1. Jos lasketaan kontravariantin vektorin  $x^i$  gradientti, saadaan

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \delta_j^i$$

ns. KRONECKERIN delta, käytännössä yksikkömatriisi. Se on tensori:

$$\delta_{j'}^{i'} = \alpha_{j'}^j \alpha_i^{i'} \delta_j^i = \sum_{i,j} \alpha_i^{i'} \delta_j^i \alpha_{j'}^j$$

eli matriisikielellä

$$\begin{array}{ccc} \begin{matrix} i' \downarrow \\ [I'] \\ j' \rightarrow \end{matrix} & = & \begin{matrix} i' \downarrow & i \downarrow & j \downarrow \\ [A^{-1}] & [I] & [A] \\ i \rightarrow & j \rightarrow & j' \rightarrow \end{matrix} = A^{-1}A = I, \end{array}$$

koska jos  $\alpha_{j'}^j$  matriisiesitys on  $A$ , niin  $\alpha_i^{i'}$ :n – vastaavasti  $\alpha_{j'}^j$ :n – matriisiesitys on  $A^{-1}$ , kuten yllä todettiin.

2. Tullio LEVI-CIVITA<sup>6</sup>:n “korkkiruuvitensori” kolmessa ulottuvuudessa:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{jos } ijk : \text{sta kaksi on sama} \\ 1 & \text{jos } ijk \text{ on lukujen } (123) \text{ parillinen permutaatio} \\ -1 & \text{jos } ijk \text{ on lukujen } (123) \text{ pariton permutaatio} \end{cases}$$

Eli  $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ ,  $\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$ , kaikki muut = 0.

Ks. <http://folk.uio.no/patricg/teaching/a112/levi-civita/>.

<sup>6</sup>Tullio LEVI-CIVITA (1873 – 1941), italialainen matemaatikko

## 9.2 Metrinen tensori

Metrinen tensori eli *metriikka* kuvaa kaarevan avaruuden Pythagoraan lauseen muotoa. Se on sama kuin aikaisemmin käsitelty Gaußin ensimmäinen perusmuoto. Tavallisessa tasossa ( $\mathbb{R}^2$ ) voidaan valita suorakulmaiset koordinaatit  $(x, y)$ , jonka jälkeen kahden pisteen 1, 2 välistä etäisyyttä  $s$  voidaan kirjoittaa:

$$s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

jossa  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$  ovat pisteen väliset koordinaattierot. Tämä kaava on voimassa koko tasossa. Sen differentiaaliversio on samannäköinen:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Tätä kirjoitetaan nyt seuraavaan muotoon:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (9.6)$$

missä

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } dx^i = dx^j = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}.$$

Tätä kutsutaan euklidisen tason suorakulmaisen koordinaatiston *metriikaksi*. Kaavassa (9.6) on oletettu, että summataan indeksien  $i$  ja  $j$  yli; tätä kutsutaan *Einsteinin summauskonventioksi*. Aina kun kaavassa on samanniminen ylä- ja alaindeksi, summataan sen yli. Eli tässä tapauksessa

$$ds^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j.$$

Vaihtoehtoinen kirjoitustapa käyttämällä matriisikirjoitustapa on *kvadraattinen muoto*:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \langle dx \cdot H dx \rangle = dx^T H dx = \\ &= \underbrace{dx^T}_{\begin{bmatrix} dx^1 & dx^2 \end{bmatrix}} \underbrace{H}_{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}} \underbrace{dx}_{\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

Jos pinta ei ole kaareva, voidaan aina löytää koordinaatisto, joka on *kaikkialla* suorakulmainen ja molemmat koordinaatit "skaalattu" oikein niin, että koordinaattieroon 1 m vastaa paikkaerokin 1 m. Silloin  $g_{ij}$ -matriisi eli *metrinen tensori* on muotoa yksikkömatriisi, kuten yllä.

Mikäli pinta on kaareva, voidaan löytää yksikkömatriisin muotoinen matriisi *vain* joissakin paikoissa. Esim. maapallon pinnalla vain ekvaatorin lähellä olevassa vyöhykkeessä. Se ei onnistu yhtenäisesti koko Maan pinnalla.

Kuitenkin voidaan valita myös ei-kaarevassa pinnassa koordinaatisto, joka ei ole suora vain *vino*, ja jossa koordinaatit ovat mielivaltaisesti skaalattu. Ks. kuva 9.1.

Tässä tapauksessa saadaan kosinissäännön avulla:

$$s^2 = p^2 \Delta u^2 + q^2 \Delta v^2 + 2p \Delta u q \Delta v \cos \alpha,$$

eli differentiaalisesti

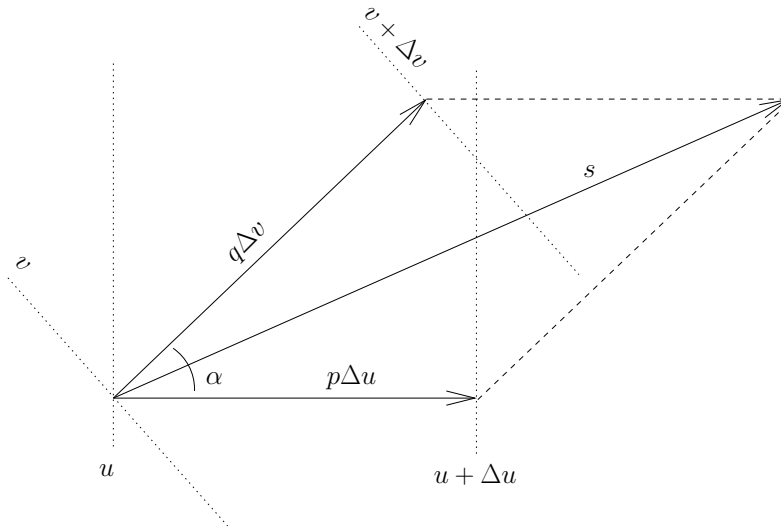
$$ds^2 = p^2 du^2 + q^2 dv^2 + 2pq \cos \alpha du dv,$$

eli indeksinotaatiossa

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

jossa

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} p^2 & pq \cos \alpha \\ pq \cos \alpha & q^2 \end{bmatrix}, \quad dx^i = \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$



Kuva 9.1: Vinometriikka tasossa

Matriisiesitystapa:

$$ds^2 = \underbrace{\begin{matrix} dx^i \\ [ du \quad dv ] \end{matrix}} \underbrace{\begin{matrix} g_{ij}, \downarrow i, \rightarrow j \\ \begin{bmatrix} p^2 & pq \cos \alpha \\ pq \cos \alpha & q^2 \end{bmatrix} \end{matrix}} \underbrace{\begin{matrix} dx^j \\ [ du \\ dv ] \end{matrix}}.$$

*Kaarevalla* pinnalla  $g_{ij}$  on paikkariippuvainen,  $g_{ij}(x^i)$ , jossa  $x^i$  on pintaa kuvaavien parametrien “vektori”,  $x^i = [ u \quad v ]^T$ . Myös ei-kaarevalla pinnalla  $g_{ij}$  voi olla paikasta riippuvainen, esim. kun valitaan kääreväkäyräiset, esim. napakoordinaatit.

**Esimerkkejä:**

1. Pallomaisen Maan pinta:

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2,$$

eli

$$g_{ij}(\varphi, \lambda) = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \varphi \end{bmatrix}, \quad dx^i = \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{bmatrix},$$

jolloin “matriisikielellä”

$$ds^2 = \underbrace{\begin{matrix} dx^i \\ [ d\varphi \quad d\lambda ] \end{matrix}} \underbrace{\begin{matrix} g_{ij}, \downarrow i, \rightarrow j \\ \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \varphi \end{bmatrix} \end{matrix}} \underbrace{\begin{matrix} dx^j \\ [ d\varphi \\ d\lambda ] \end{matrix}}.$$

2. Tasossa napakoordinaatit  $(\rho, \theta)$ :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

eli

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}, \quad dx^i = \begin{bmatrix} d\rho \\ d\theta \end{bmatrix},$$

jolloin

$$ds^2 = \underbrace{\begin{matrix} dx^i \\ [ d\rho \quad d\theta ] \end{matrix}} \underbrace{\begin{matrix} g_{ij}, \downarrow i, \rightarrow j \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \end{matrix}} \underbrace{\begin{matrix} dx^j \\ [ d\rho \\ d\theta ] \end{matrix}}.$$

### 9.3 Metrinen käänteistensori

Metrisen tensorin  $g_{ij}$  käänteistensoria kirjoitetaan  $g^{ij}$ . Matriisina se on  $g_{ij}$ :n käänteismatriisi:

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1},$$

eli indeksinotaationa

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i.$$

Tämä ei ole mitään muuta kuin käänteismatriisin *määritelmä*:

$$H^{-1}H = I,$$

jossa  $I$  on yksikkömatriisi, KRONECKER-tensorin  $\delta_k^i$  matriisiesitys. Kirjoitettuna auki:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}}^{g^{ij}, \downarrow i, \rightarrow j} \overbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}}^{g_{jk}, \downarrow j, \rightarrow k} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\delta_k^i, \downarrow i, \rightarrow k}.$$

#### 9.3.1 Tensorin indeksien nostaminen tai laskeminen

Mielivaltaisen tensorin indeksi voidaan “nostaa” tai “laskea” kertomalla metrinen tensori  $g_{ij}$  tai käänteistensorin  $g^{ij}$  kanssa:

$$T_j^i = g^{ik}T_{kj} = g_{jk}T^{ki}.$$

Kaikki muodot  $T_{ij}, T^{ij}, T_j^i$  kuvaavat samaa tensoria, eri tavalla kirjoitettuna. Erikoistapauksena  $\delta_j^i = g_{jk}g^{ki} = g^{ik}g_{kj}$ , eli KRONECKERIN delta-tensori on metrinen tensorin “sekamuoto” ja voitaisiin kirjoittaa  $g_j^i$ . Kuitenkin delta-kirjoitustapa on vakiintunut.

#### 9.3.2 Tensorin ominaisarvot ja -vektorit

Neliskanttisen tensorin ominaisarvotekävä on seuraavan muotoinen:

$$\begin{aligned} (T^{ij} - \lambda g^{ij})x_j &= 0, \\ (T_{ij} - \lambda g_{ij})x^j &= 0, \\ (T_j^i - \lambda \delta_j^i)x^j &= (T_j^i - \lambda \delta_j^i)x_i = 0. \end{aligned}$$

Kaikki kolmet muodot ovat samantarvoisia, kuten voidaan helposti todistaa. Ominaisvektoreille pätee  $x_i = g_{ij}x^j$ . Jos tensori  $T^{ij}$  (tai  $T_j^i$ , tai  $T_{ij}$ ) on symmetrinen (siis  $T^{ij} = T^{ji}$  jne.), ovat ominaisarvot  $\lambda$  reaaliarvoisia ja ominaisvektorit keskenään ortogonaalisia: jos  $x^i, y^i$  ovat eri ominaisvektoreita, on

$$g_{ij}x^i y^j = 0.$$

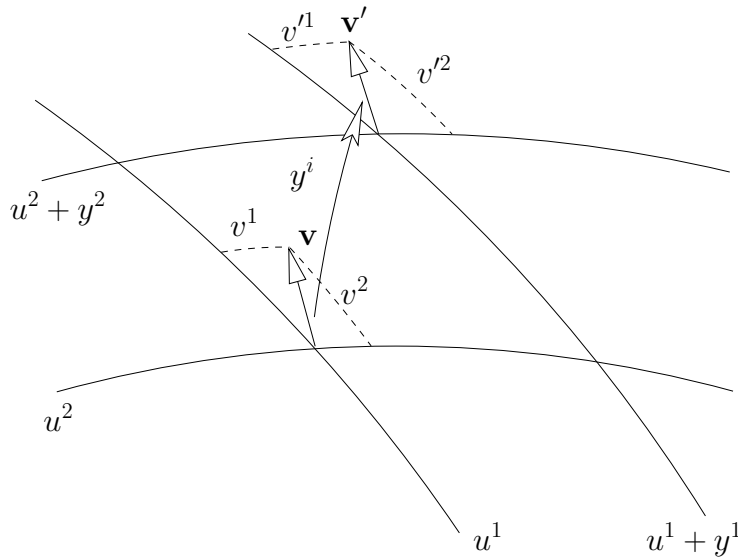
On yhtä monta eri ominaisarvoa kuin avaruudessa on ulottuvuuksia, eli tasossa  $\mathbb{R}^2$  kaksi.

#### 9.3.3 Tensorin kuvaaja

Kvadraattinen muoto

$$T_{ij}x^i x^j = 1$$

määrittää ellipsoidi ( $\mathbb{R}^2$ :ssa ellipsi) jota voidaan pitää tensorin  $T_{ij}$  kuvaajana. Esim. inertiaellipsoidi, varianssiellipsoidi.



Kuva 9.2: Christoffelin symbolit ja rinnakkaiskuljetus

## 9.4 Christoffelin symbolit

Metrinen tensori ei vielä ole sama kuin kaarevuus. Se ei ole edes sama kuin koordinaattikäyrien kaarevuutta; sen tutkimiseksi tarvitaan *Christoffelin<sup>7</sup> symbolit*.

Christoffelin symbolit kuvaavat sitä, mitä tapahtuu *vektorilla* kun sitä *kuljetetaan rinnakkaisesti* pintaa pitkin; tarkemmin, mitä tapahtuu sen komponenteille.

Ks. kuva 9.2. Kun vektori  $\mathbf{v}$ , jonka komponentit ovat  $v^i$ , kuljetetaan rinnakkaisesti pisteestä toiseen matkalla  $y^i$ , muuttavat sen komponentit määrillä  $\Delta v^i = v'^i - v^i$ , vaikka “vektorille itse”  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ . Kun sekä siirretty vektori itse että siirron matka ovat *pieniä*, saadaan olettaa, että muutos riippuu *lineaarisesti* sekä vektorista ja kuljetussuunnasta, seuraavalla tavalla:

$$\Delta v^i = \Gamma_{jk}^i v^j y^k.$$

Christoffelin symbolit  $\Gamma_{jk}^i$  *eivät muodosta tensori* kuten metrinen tensori. Ne kuvaavat käyräviivaisen koordinaatiston “käyräviivaisuutta”, eli koordinaatiston ominaisuutta. Koordinaattimuunnos joka hävittää — edes paikallisesti ellei kaikkialla — koordinaattiviivojen kaarevuutta, tekee myös  $\Gamma_{jk}^i$ :n elementit nolliksi siinä pisteessä (tensorille sellainen paikallinenkaan “poismuuntaminen” ei koskaan onnistu!).

Esimerkiksi Maan pinnalla  $(\varphi, \lambda)$ -koordinaatistossa ekvaattorilla koordinaattiviivat ovat paikallisesti ei-kaarevia ja myöhemmin näytetään, että siellä todella kaikki  $\Gamma_{jk}^i$  ovat nollia. Toinen esimerkki on yleisestä suhteellisuusteoriasta, jossa *kiihtyvyyden* komponentit ovat Christoffel-symboleja: kiihtyvyyttä voidaan muuntaa pois siirtymällä “mukana putoavaan” vertausjärjestelmään. Einsteinin putoavassa hississa ihmiset hissien sisällä kiihtyvät Maan pinnan suhteen mutta ovat painottomia (siis kiihtyvyys on nolla) hissiin sidotussa vertausjärjestelmässä.

Christoffelin symbolit voidaan laskea metriikkatensorista; kaava on (mutkikas todistus; katso liite C):

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \quad (9.7)$$

( $g^{ij} \equiv (g_{ij})^{-1}$ .) Tästä näkyy, että Christoffelin symbolit ovat, niinkuin, metriikan ensimmäiset derivaatat. Suoraviivaisessa koordinaatistossa ei-kaarevalla pinnalla  $g_{ij}$  on vakio ja siis kaikki  $\Gamma_{jk}^i$  häviävät. Myös, koska  $g_{ij}$  on symmetrinen ( $g_{ij} = g_{ji}$ ), saadaan

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i.$$

<sup>7</sup>Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), saksalainen matemaatikko-fysikko

Christoffelin symboleista on hyötyä kun kirjoitetaan *geodeettisen viivan kaava*<sup>8</sup>tässä formalismissa (ks. kaava (8.8)):

$$\frac{d}{ds}t^i + \Gamma_{jk}^i t^j t^k = 0.$$

Tässä  $t^i$  on viivan *tangentivektori*  $t^i = dx^i/ds$ .

### Esimerkkejä:

1. Pallomaisen Maan pinta  $(\varphi, \lambda)$ . Käytetään notaatio, jossa  $\varphi$  ja  $\lambda$  symbolisoivat indeksiarvot 1 ja 2 (näille symboleille Einsteinin summauskonventio siis *ei* toimi!):

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R^2 \sin 2\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g_{kl}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

eli ainoastaan

$$\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial \varphi} = \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi} = -R^2 \sin 2\varphi$$

eroaa nolasta. Silloin, kun muistetaan että

$$g^{il} = (g_{il})^{-1} = \begin{bmatrix} R^2 & \\ & R^2 \cos^2 \varphi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-2} & \\ & R^{-2} \cos^{-2} \varphi \end{bmatrix},$$

ainoat nolasta eroavat elementit ovat:

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^\varphi = \frac{1}{2} (g_{\varphi\varphi})^{-1} \left( -\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{2} R^{-2} \cdot R^2 \sin 2\varphi = +\frac{1}{2} \sin 2\varphi = \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\Gamma_{\varphi\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} (g_{\lambda\lambda})^{-1} \left( \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2} (R^{-2} \cos^{-2} \varphi) (-R^2 \sin 2\varphi) = -\frac{\sin 2\varphi}{2 \cos^2 \varphi} = -\tan \varphi,$$

$$\Gamma_{\lambda\varphi}^\lambda = \frac{1}{2} (g_{\lambda\lambda})^{-1} \left( \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial \varphi} \right) = -\tan \varphi.$$

*Huomaa*, että ekvaattorilla  $\varphi = 0$  kaikki  $\Gamma_{jk}^i = 0$ .

2. Tasossa napakoordinaatit  $(\rho, \theta)$ :

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\rho \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g_{kl}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

eli

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial \rho} = \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \rho} = 2\rho,$$

jolloin

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\rho &= \frac{1}{2} (g_{\rho\rho})^{-1} \left( -\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{2} \cdot -2\rho = -\rho, \\ \Gamma_{\rho\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\rho}^\theta &= \frac{1}{2} (g_{\theta\theta})^{-1} \left( +\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\rho = +\frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Itse asiassa kirjoitetaan

$$\frac{Dt^i}{ds} \equiv \frac{dt^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i t^j t^k,$$

ns. *absoluuttinen* tai *kovariantti derivaatta* joka on tensori; ja

$$\frac{Dt^i}{ds} = 0$$

on silloin *geodeettisen viivan kaava*, joka siis pätee jokaisessa kaarevalinjaisessa koordinaatistossa.

## 9.5 Geodeettinen viiva uudelleen

Tässä vaihtoehtoiset kaavat geodeettisen viivan integroimiseksi pallolla (yleistys *pyörähdysellipsoidille* on mutkikas mutta mahdollinen):

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{ds} + \eta^2 \sin \varphi \cos \varphi &= 0, \\ \frac{d\eta}{ds} - 2\eta\xi \tan \varphi &= 0.\end{aligned}$$

Tässä on jo käytetty edellisessä johdetut kaavat  $\Gamma_{jk}^i$ :n alkioille.

Differentiaaliyhtälöiden yht'aikainen integrointi antaisi

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos A}{R} \\ \frac{\sin A}{R \cos \varphi} \end{bmatrix},$$

$s$ :n funktiona, josta  $A$  ja  $\varphi$  ovat laskettavissa.

Tähän ryhmään lisätään tangentin määritelmäkaavat

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{ds} = \xi &= t^1, \\ \frac{d\lambda}{ds} = \eta &= t^2,\end{aligned}$$

Näin tulee myös  $\lambda$  mukaan.

Tämä lähetymistapa kuulostaa ehkä turhan monimutkaiselta; sen suurena teoreettisena etuna on, että se toimii *kaikissa* tutkittavan pinnan käyräviivaisissa koordinaattijärjestelmissä, myös esim. napa-alueiden stereograafisissa karttaprojektiokoordinaateissa, kun vaan saadaan ensin kirjoitetuksi alas koordinaattikäyrien *metrinen tensori*.

Tangenttivektorin  $[\xi \ \eta]^T$  *pituus* lasketaan seuraavasti:

$$ds^2 = g_{ij}t^i t^j = R^2 \left(\frac{\cos A}{R}\right)^2 + R^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\sin A}{R \cos \varphi}\right)^2 = 1,$$

jos muistetaan, että

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \varphi \end{bmatrix}$$

pallopinnalla. Tangenttivektorin pituus on aina oltava 1; tämä vaatimus täytyy jos  $s$  on kaaren parametrisointi "pituuden mukaan".

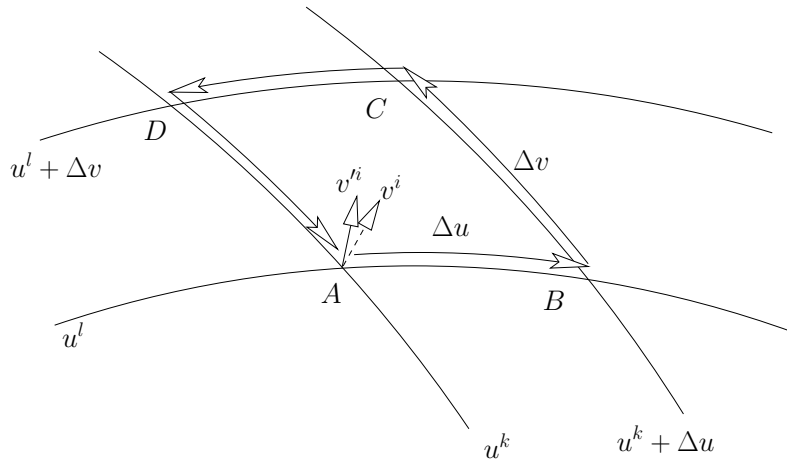
## 9.6 Kaarevuustensori

*Kaarevuutta* kuvataan taas hieman monimutkaisemmalla tavalla *suljetun polun* — pienen neliskantin<sup>9</sup> — *rinnakkaiskuljetuksen* avulla.

Kuten kuvasta 9.3 näkyy, saadaan vektorin  $v^i$  komponenttien muuttumista  $\Delta v^i \equiv (v')^i - v^i$ , joka riippuu

1. neliskanttisen ympäröidyn orientoinnista, sivujen indeksit  $k$  ja  $l$ ;
2. neliskantin koosta mitattuna käyräviivaisissa koordinaateissa:  $u^k$ -sivun pituus olkoon  $\Delta u$  ja  $u^l$ -sivun pituus  $\Delta v$ ;

<sup>9</sup>Tarkemmin: parallelogrammin



Kuva 9.3: Kaarevuustensori ja rinnakkaiskuljetus suljetun ruudukopolun ympäri

3. itse kuljetetusta vektorista  $v^i$ .

Seuraavalla tavalla:

$$\Delta v^i = R^i_{jkl} v^j \Delta u \Delta v. \quad (9.8)$$

Tässä luontokappaletta  $R^i_{jkl}$  kutsutaan *Riemannin kaarevuustensoriksi*. Sillä on kaksiulotteisessa avaruudessa (eli, pinnalla)  $2^4 = 16$  alkioita.

Riemann saadaan lasketuksi Christoffeleista<sup>10</sup>:

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{jk}. \quad (9.9)$$

Tästä näkyy jo heti seuraava antisymmetria:

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}.$$

On olemassa monta muuta sellaisia symmetrioita ja riippumattomien komponenttien määrä on loppujen lopuksi aika pieni.

### Esimerkkejä:

1. Pallomaisen Maan pinta  $(\varphi, \lambda)$ :

Antisymmetria-ominaisuuden perusteella voimme sanoa, että vain alkio, joille  $k \neq l$  voivat olla nollasta eroavia. Lisäksi Christoffelin symbolit riippuvat vain  $\varphi$ :stä. Näin saadaan aputermit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Gamma^{\varphi}_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) = +\cos 2\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \Gamma^{\lambda}_{\varphi\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\tan \varphi) = -\frac{1}{\cos^2 \varphi}, \end{aligned}$$

muut nolla.

Termit  $\Gamma^i_{km} \Gamma^m_{jl}$  saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\varphi}_{\lambda\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\varphi\lambda} &= \Gamma^{\lambda}_{\lambda\varphi} \Gamma^{\varphi}_{\lambda\lambda} = \Gamma^{\varphi}_{\lambda\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\varphi} = -\sin^2 \varphi, \\ \Gamma^{\lambda}_{\varphi\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\varphi} &= \Gamma^{\lambda}_{\varphi\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\varphi\lambda} = +\tan^2 \varphi. \end{aligned}$$

Yhdistämällä

<sup>10</sup>Kaavan johtaminen tapahtuu liitteessä D.

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi\varphi\lambda}^{\varphi} = -R_{\varphi\lambda\varphi}^{\varphi} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\Gamma_{\varphi\lambda}^{\varphi} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} + \Gamma_{\varphi m}^{\varphi}\Gamma_{\varphi\lambda}^m - \Gamma_{\lambda m}^{\varphi}\Gamma_{\varphi\varphi}^m = 0; \\
 R_{\varphi\varphi\lambda}^{\lambda} = -R_{\varphi\lambda\varphi}^{\lambda} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\Gamma_{\varphi\lambda}^{\lambda} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\varphi\varphi}^{\lambda} + \Gamma_{\varphi m}^{\lambda}\Gamma_{\varphi\lambda}^m - \Gamma_{\lambda m}^{\lambda}\Gamma_{\varphi\varphi}^m = -\frac{1}{\cos^2\varphi} + \tan^2\varphi = -1; \\
 R_{\lambda\varphi\lambda}^{\varphi} = -R_{\lambda\lambda\varphi}^{\varphi} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\Gamma_{\lambda\lambda}^{\varphi} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\lambda\varphi}^{\varphi} + \Gamma_{\varphi m}^{\varphi}\Gamma_{\lambda\lambda}^m - \Gamma_{\lambda m}^{\varphi}\Gamma_{\lambda\varphi}^m = \cos 2\varphi + \sin^2\varphi = \cos^2\varphi; \\
 R_{\lambda\varphi\lambda}^{\lambda} = -R_{\lambda\lambda\varphi}^{\lambda} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\Gamma_{\lambda\lambda}^{\lambda} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\lambda\varphi}^{\lambda} + \Gamma_{\varphi m}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\lambda}^m - \Gamma_{\lambda m}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\varphi}^m = 0.
 \end{aligned}$$

2. Napakoordinaatit  $(\rho, \theta)$  tasossa:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial\rho}\Gamma_{\theta\theta}^{\rho} &= -1, \\
 \frac{\partial}{\partial\rho}\Gamma_{\rho\theta}^{\theta} = \frac{\partial}{\partial\rho}\Gamma_{\theta\rho}^{\theta} &= -\frac{1}{\rho^2},
 \end{aligned}$$

muut taas nolla. Sitten:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\theta\theta}^{\rho}\Gamma_{\rho\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta\rho}^{\theta}\Gamma_{\theta\theta}^{\rho} = \Gamma_{\theta\theta}^{\rho}\Gamma_{\theta\rho}^{\theta} &= -1, \\
 \Gamma_{\rho\theta}^{\theta}\Gamma_{\theta\rho}^{\theta} = \Gamma_{\rho\theta}^{\theta}\Gamma_{\rho\theta}^{\theta} &= +\frac{1}{\rho^2}.
 \end{aligned}$$

Tämän jälkeen:

$$\begin{aligned}
 R_{\rho\rho\theta}^{\rho} = -R_{\rho\theta\rho}^{\theta} &= 0; \\
 R_{\rho\rho\theta}^{\theta} = -R_{\theta\rho\rho}^{\theta} &= \frac{\partial}{\partial\rho}\Gamma_{\rho\theta}^{\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta}\Gamma_{\rho\rho}^{\theta} + \Gamma_{\rho m}^{\theta}\Gamma_{\rho\theta}^m - \Gamma_{\theta m}^{\theta}\Gamma_{\rho\rho}^m = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} = 0; \\
 R_{\theta\rho\theta}^{\rho} = -R_{\theta\theta\rho}^{\rho} &= \frac{\partial}{\partial\rho}\Gamma_{\theta\theta}^{\rho} - \frac{\partial}{\partial\theta}\Gamma_{\theta\rho}^{\rho} + \Gamma_{\rho m}^{\rho}\Gamma_{\theta\theta}^m - \Gamma_{\theta m}^{\rho}\Gamma_{\theta\rho}^m = -1 + 1 = 0; \\
 R_{\theta\rho\theta}^{\theta} = -R_{\theta\theta\rho}^{\theta} &= 0.
 \end{aligned}$$

Siis koko Riemann-tensori häviää, kuten pitääkin, koska pinta ei ole kaareva.

Riemann-tensorista saadaan pienempi Ricci<sup>11</sup>-tensori seuraavalla tavalla:

$$R_{jk} = R_{jik} = \sum_{i=1}^2 R_{jik}^i. \tag{9.10}$$

Tämä on symmetrinen tensori,  $R_{ij} = R_{ji}$ .

### Esimerkkejä

1. Jatketaan  $R_{ij}$ :n laskemisella pallopinnan tapauksessa:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi\varphi} &= R_{\varphi\varphi\varphi}^{\varphi} + R_{\varphi\lambda\varphi}^{\lambda} = +1; \\
 R_{\varphi\lambda} &= R_{\varphi\varphi\lambda}^{\varphi} + R_{\varphi\lambda\lambda}^{\lambda} = 0 + 0 = 0; \\
 R_{\lambda\lambda} &= R_{\lambda\lambda\lambda}^{\lambda} + R_{\lambda\varphi\lambda}^{\varphi} = \cos^2\varphi.
 \end{aligned}$$

2. Napakoordinaateille tasossa kaikki  $R_{ij} = 0$ .

<sup>11</sup>Gregorio RICCI-CURBASTRO (1853 – 1925), italialainen matemaatikko, tensorilaskennan keksijä

Voidaan jatkaa tätä prosessia saadakseen *kaarevuusskalaari*<sup>12</sup>:

$$R = g^{ij} R_{ji} = \sum_{j=1}^2 (g_{ij})^{-1} R_{ji}. \quad (9.11)$$

**Esimerkkitaupauksessa:**

1. Pallopinta:

$$R_k^i = g^{ij} R_{jk} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +\cos^2 \varphi \end{bmatrix},$$

siis<sup>13</sup>

$$R = \sum_i R_i^i = \frac{1}{R^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{R^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2}{R^2}.$$

2. Napakoordinaateille  $R_{ij} = 0$  siis  $R = 0$ .

Yleisemmin pätee (ilman todistusta):

$$R = 2K = 2\kappa_1\kappa_2 = \frac{2}{R_1 R_2}, \quad (9.12)$$

kaksi kertaa *Gaußin kokonaiskaarevuuslukua*  $K$ , pääkaarevuussäteiden tulon käänteisluku.

## 9.7 Gaußin kaarevuus ja palloylijäämä

Toisin kuin Gaußin kolmannen perusmuodon  $\beta_k^i = g^{ij} \beta_{jk}$  (luku 8.4) ominaisarvot, tensorin  $R_j^i$  ominaisarvot *eivät liity* pinnan pääkaarevuuksiin<sup>14</sup>  $\kappa_1$  ja  $\kappa_2$ . *Kaksisulotteisessa tapauksessa* sekä  $R_{ij}$ -tensorilla että  $R_{jkl}^i$ -tensorilla on *vain yksi olennaisesti riippumaton alkio*, joka liittyy Gaußin kokonaiskaarevuuteen  $K = \kappa_1\kappa_2$ .

Tämä ei ole vaikeata näyttää:

1. kaavassa (9.8)  $\Delta u \Delta v$  kuvaa pienen vinoneliön sivut, jonka ympäri vektori  $v^i$  kuljetetaan rinnakkaisesti. Kahdessa ulottuvuudessa  $u^k, u^l$ -suuntaisille sivuille on vain kaksi valintaa:  $\Delta u \Delta v$  ja  $\Delta v \Delta u$ . Toinen edustaa myötapäiväinen ympärikuljetus, toinen vastapäiväinen. Vastaavat elementit  $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$  ovat siis olennaisesti samat.
2. Samassa kaavassa  $v^j$  ja  $\Delta v^i$  ovat keskenään kohtisuoria.  $\Delta v^i$  edustaa vektorin  $v^j$  pieni *rotaatio*. Pinnassa, kahdessa ulottuvuudessa, rotaatiota kuvaa *yksi kulma*. Koska kahden rinnakkaisesti kuljetetun vektorin välinen kulma ei muutu, voidaan päätellä, että tämä rotaatiokulma on sama kaikille mahdollisille vektoreille  $v^i$ . Taas löytyy vain yksi riippumaton parametri. Ks. kuva 9.4.

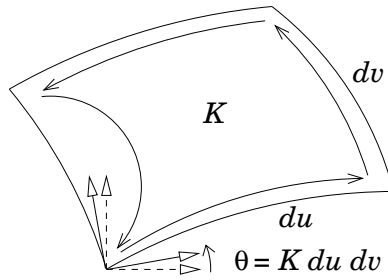
Toisin sanoin, annettuna  $\Delta u \Delta v$ -vinoneliö on ilmaisu  $R_{j12}^i \Delta u \Delta v = -R_{j21}^i \Delta v \Delta u$   $2 \times 2$  rotaatiomatriisi  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , jossa on vain yksi vapaa parametri.

Kuitenkin korkeammilla ulottuvuusluvuilla Riemannin ja Riccin tensorien rippumattomien alkioiden määrä on suurempi. Tämä tapaus on kiinnostava yleisen suhteellisuusteorian (neljä ulottuvuutta!) vaikei geodesian kannalta.

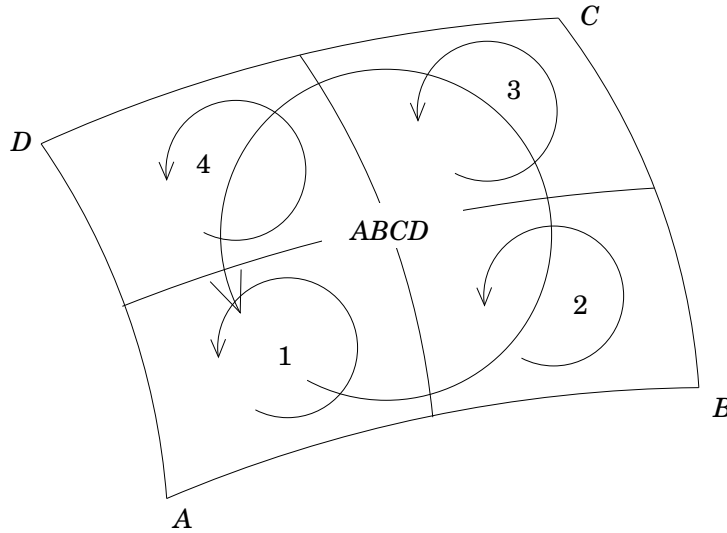
<sup>12</sup>Tämä on itse asiassa tensorin  $R_{ij}$ , tarkemmin  $R_j^i \equiv g^{ik} R_{kj}$ , "jälki"  $R_i^i$ , ks. aikaisemmin. Olkoon tämä myös esimerkki siitä, miten yleisissä kaarevalinjaisissa koordinaateissa indeksi voidaan "nostaa" kovariantista kontravariantiksi, tai "laskea", metrisen tensorin  $g_{ij}$  tai sen käänteisen  $g^{ij}$  avulla. Suorakulmaisissa koordinaateissa nämä ovat yksikkömatriisit ja ero ylä- ja ala-indeksien välillä on merkityksetöntä.

<sup>13</sup>Tässä symboli  $R$  käytetään sekä maan säteelle että kaarevuusskalaariin. Toivottavasti oikea merkitys selviää.

<sup>14</sup>Kaarevuussäteethän ovat vain olemassa maan pintaa ympäröivässä kolmiulotteisessa avaruudessa, johon pinta on upotettu.  $R$  toisaalta on pinnan sisäinen, *intrinsic* ominaisuus.



Kuva 9.4: Kaksiulotteisen pinnan kaarevuutta luonnehditaan vain yhdellä parametrilla:  $\theta$ .



Kuva 9.5: Vektorin kuljetus suuremman pinta-alan ympäri.  $\theta_{ABCD} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ .

Voimme tässä huomata, että jo luvussa 1.2 käsitelty *palloylijäämä* on erikoistapaus rinnakkaisesti ympäri kuljetetun vektorin suunnanmuutoksesta: palloylijäämä on pieni vektorin suuntamuutos kun sitä kuljetetaan suljetun *kolmion* ympäri!

Kun kuljetetaan vektori suuremman pinta-alan ympäri, on se sama kuin sitä kuljetettaisiin peräkkäin niiden pikkuneliöitten ympäri, josta pinta-ala koostuu. Tämä on kuvattu kuvassa 9.5. Jokaisessa pikkuneliössä  $dudv$ , pinta-ala  $dS$ , vektorin suunnanmuutos on suuruudeltaan  $KdS$ , jossa  $K$  on Gaußin kokonaiskaarevuus neliön kohdalla.

Tästä saa yleistämällä seuraava integraalikaava (GAUSS-BONNET<sup>15</sup> kolmiolle, *Theorema elegantissimum*):

$$\varepsilon = \iint_{\Delta} K(\varphi, \lambda) dS,$$

jossa  $K$  on paikan funktio.

Vertausellipsoidilla  $K = (MN)^{-1}$  ja

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \iint_{\Delta} \frac{1}{MN} dS = \iint_{\Delta} \frac{1}{MN} MN \cos \varphi d\varphi d\lambda = \\ &= \iint_{\Delta} d\sigma = \sigma_{\Delta}, \end{aligned}$$

vastaavan kolmion pinta-ala *yksikköpallon* pinnalla<sup>16</sup>.

Tästä seuraa, että

<sup>15</sup>Pierre Ossian Bonnet (1819 – 1892), ranskalainen matemaatikko

<sup>16</sup>Tämä ei pidä *ihan eksaksisti* paikkansa. . . kolmiomerkit ellipsoidin integraalin  $d\varphi d\lambda$  alla ja pallon integraalin  $d\sigma$  alla eivät vastaa tarkasti toisiinsa. Vertausellipsoidilla kolmio koostuu geodeettisista viivoista, yksikköpallolla se koostuu suurympyräsegmenteistä; kuitenkin ellipsoidin geodeettinen viiva *ei kuvaudu* suurympyrälle!

vertausellipsoidilla palloylijäämä riippuu vain kolmion kulmapisteiden ellipsoidisten normaalien  $(\varphi_i, \lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  suunnista eikä ellipsoidipinnan muodoista. Lyhyemmin: Palloylijäämät lasketaan pallolla, vaikka muut laskennat tehdään ellipsoidilla.

Riittää, jos kulmapisteiden maantieteelliset koordinaatit, jotka kuvaavat ellipsoidista normaalia, ovat tiedossa.

Nopea geometrinen tapa laskea pallokolmion ylijäämä on seuraava:

Olkoon kulmapisteet

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ \sin \varphi_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3;$$

käytetään *polarisaatiomenetelmä* (1.7) kolmiulotteisesti kolmion sivujen “napojen” löytämiseksi:

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3\|}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1\|}, \quad \mathbf{y}_3 = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}.$$

Nyt napojen keskinäiset etäisyydet vastaavat pallokolmion kulmiin (tarkemmin,  $\pi$  minus niitä kulmia):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \pi - 2 \arctan \frac{\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3\|}{\|\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3\|}, \\ \alpha_2 &= \pi - 2 \arctan \frac{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_3\|}{\|\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_3\|}, \\ \alpha_3 &= \pi - 2 \arctan \frac{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|}{\|\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2\|}, \end{aligned}$$

numeerisesti vahvat kaavat<sup>17</sup>. Tässä  $\alpha_i$  on kulmapiste  $i$ :n kulma. Palloylijäämä on nyt

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi.$$

## 9.8 Kaarevuus kvasi-euklidisessa geometriassa

Ilman todistusta mainittakoon, että Riemann-avaruudessa voidaan *muunta* kaarevalinjaiset koordinaatit aina siten, että tietyssä pisteessä  $P$

1. metrinen tensori on yksikkömatriisi,

$$g_{ij} = g^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jos } i = j \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

2. metrinen tensori on (paikallisesti) *stationaarinen*, ts.

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{x^k = x_P^k} = 0.$$

---

Tätä voidaan jo epäillä havainnosta, että pitkä geodeettinen viiva ellipsoidin ympäri ei yleensä sulkeudu itseensä, toisin kuin suurympyrä pallon ympäri.

Tämän lisäksi, ellipsoidisen kolmion ja pallokolmion *kulmat* eivät yksitellen ole yhtäsuuria; niiden *summat* (ja niiden mukana palloylijäämät) kuitenkin ovat.

<sup>17</sup>Joisakin ohjelmointikielissä  $\arctan(x/y)$ :n vaihtoehdoksi tarjoutuu symmetrinen  $\text{atan2}(x, y)$  muoto, jolloin nollajako-ongelmia ei esiinny.

Tässä tapauksessa puhutaan *kvasi-euklidisestä* pisteen  $P$  ympäristöstä.

Tässä tapauksessa Christoffel-symbolit (kaava 9.7) ovat

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \approx 0\end{aligned}$$

yo. stationaarisuusolettamuksen perusteella.

Riemannin kaarevuustensorista (kaava 9.9) kaksi viimeistä termiä häviävät:

$$\begin{aligned}R_{jkl}^i &= \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jl}^i - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^i = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^l} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} g_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right).\end{aligned}$$

Jos nyt lasketaan Ricci-tensori (kaava 9.10):

$$\begin{aligned}R_{jl} &= R_{jil}^i = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g_{jl}}{(\partial x^i)^2} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i \partial x^l} - \sum_i \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^l \partial x^i} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \Delta g_{jl} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i \partial x^l} - \sum_i \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x^l \partial x^j} \right).\end{aligned}$$

Tämä on jo paljon symmetrisemmän näköinen. Symboli  $\Delta$  tässä merkitsee *Laplace-operaattori*

$$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}.$$

Jos lopulta lasketaan vielä kaarevuusskalaari

$$\begin{aligned}R &= g^{jk} R_{kj} = \sum_j R_{jj} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \Delta g_{jj} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 g_{ii}}{(\partial x^j)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \Delta g_{jj} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{2} \sum_i \Delta g_{ii}.\end{aligned}$$

Siinä erikoistapauksessa, että koordinaattiviivat ovat (kaikkialla, ei vain pisteessä  $P$ ) *ortogonaalisia*, saadaan  $g_{ij} = 0$  jos  $i \neq j$  paikkaderivaatteineen, siis

$$R = - \sum_i \Delta g_{ii}. \quad (9.13)$$

Tämä kaava tulee olemaan hyödyksi seuraavassa.

# 10 Karttaprojektiot

Karttaprojektiot ovat tarpeen siksi, että kaarevan Maan pinnan kuvaaminen tasoon ei ole mahdollista virheettömästi ainakaan laajemmilla alueilla. Tässä luvussa tutkitaan mittakaavavirheen käyttäytyminen paikan funktiona eri projektiolle.

## 10.1 Karttaprojektiot ja mittakaava

### 10.1.1 Maan pinnalla

*Maan pinnalla* matka-alkio  $dS$  voi koostua leveys-alkiosta  $d\varphi$  ja pituusero-alkiosta  $d\lambda$ . Nämä vastaavat lineaarisiin etäisyyksiin  $M(\varphi)d\varphi$  ja  $p(\varphi)d\lambda$ , vastaavasti.

Pythagoraan mukaan  $(d\varphi, d\lambda)$ -postimerkin lävistäjän pituus on

$$dS^2 = M^2 d\varphi^2 + p^2 d\lambda^2. \quad (10.1)$$

Nyt  $dS^2$  määrittää *metriikan*,

$$dS^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = \mathbf{x}^T H \mathbf{x},$$

jossa

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = H \quad (10.2)$$

ja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{bmatrix}.$$

Tässä olemme määrittäneet sopivasti kaksi eri kirjoitustapaa, indeksikirjoitustapa  $g_{ij}, dx^i$  ja matriisi-vektorikirjoitustapa  $H, \mathbf{x}$ . Matriisin alkiot ovat myös *Maanpinnan Gaußin ensimmäisen perusmuodon alkiot*  $E, F, G$ . Näemme, että  $E = M^2, F = 0$  ja  $G = p^2$ .

Atsimutille  $A$  taas saadaan seuraava kaava:

$$\tan A = \frac{pd\lambda}{Md\varphi}, \quad (10.3)$$

josta, yllä olevan avulla,

$$dS \sin A = pd\lambda, \quad (10.4)$$

$$dS \cos A = Md\varphi. \quad (10.5)$$

### 10.1.2 Karttatasossa

Kun projisoidaan tämä pieni neliskantti karttatasoon, saadaan sivut  $dx$  ja  $dy$ , ja Pythagoraan mukaan sen lävistäjä on

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Nyt matka-alkio *karttatasossa* voidaan laskea näin:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda, \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 = \\ &= \tilde{E} d\varphi^2 + 2\tilde{F} d\varphi d\lambda + \tilde{G} d\lambda^2, \end{aligned} \quad (10.6)$$

jossa

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2, \\ \tilde{F} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \\ \tilde{G} &= \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2. \end{aligned}$$

$\tilde{E}$ ,  $\tilde{F}$  ja  $\tilde{G}$  ovat *karttatason* Gaußin ensimmäiset perussuureet. Mikäli karttatason matka-alkio  $ds^2$  tulkitaan Maan pinnan *metriikaksi*, saamme tässäkin metrinen tensori,

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} \equiv \tilde{H}. \quad (10.7)$$

Vastaava metriikka on

$$ds^2 = \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \mathbf{x}^T \tilde{H} \mathbf{x},$$

jossa  $dx^1 = d\varphi$  ja  $dx^2 = d\lambda$ , eli  $dx^i = dx^j = \mathbf{x} = [d\varphi \quad d\lambda]^T$ . Myös tässä nähdään vaihtoehtoisesti indeksinotaatio ja matriisi-vektori notaatio, jotka kuvaavat samaa asiaa.

### 10.1.3 Mittakaava

*Mittakaava* on nyt suhde

$$m = \frac{ds}{dS},$$

joka riippuu ilmeisesti matka-alkion suunnasta eli atsimutista  $A$ .

Kirjoitetaan *ominaisarvotehtävä*:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{\sum_{i,j} \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j}{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - m^2 \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Sama kaava "matriisikielillä", jos  $\mathbf{x} = [dx^1 \quad dx^2]^T = [d\varphi \quad d\lambda]^T$ :

$$\mathbf{x}^T (\tilde{H} - m^2 H) \mathbf{x} = 0.$$

Kaavat (10.4, 10.5) kertovatThe :

$$\begin{aligned} dS \sin A &= p d\lambda, \\ dS \cos A &= M d\varphi. \end{aligned}$$

Tutkitaan nyt kaikki vektorit, jotka ovat muotoa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos A}{\frac{M}{\sin A}} \\ \frac{M}{p} \end{bmatrix}. \quad (10.9)$$

Näiden vektorien pituudet Maan pinnalla ovat:

$$\begin{aligned} dS^2 &= M^2 d\varphi^2 + p^2 d\lambda^2 = \\ &= M^2 \left( \frac{\cos A}{M} \right)^2 + p^2 \left( \frac{\sin A}{p} \right)^2 = \\ &= \cos^2 A + \sin^2 A = 1. \end{aligned}$$

Siis: Maan pinnalla nämä vektorit muodostuvat *ykkössäteisen ympyrän*.

Sijoitetaan (10.9) kaavaan (10.8), käyttäen (10.6):

$$\begin{aligned} \tilde{E} \left( \frac{\cos A}{M} \right)^2 + \tilde{G} \left( \frac{\sin A}{p} \right)^2 + 2\tilde{F} \frac{\cos A}{M} \frac{\sin A}{p} - \\ - m^2 \left[ M^2 \left( \frac{\cos A}{M} \right)^2 + p^2 \left( \frac{\sin A}{p} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

eli, sieventämisen jälkeen,

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{\tilde{E}}{M^2} \cos^2 A + \frac{\tilde{G}}{p^2} \sin^2 A + 2\frac{\tilde{F}}{Mp} \sin A \cos A = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{E}}{M^2} + \frac{\tilde{G}}{p^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{E}}{M^2} - \frac{\tilde{G}}{p^2} \right) \cos 2A + \frac{\tilde{F}}{Mp} \sin 2A. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Tästä saadaan *stationaariset arvot*:

$$0 = \frac{d}{dA} m^2 = \left( \frac{\tilde{G}}{p^2} - \frac{\tilde{E}}{M^2} \right) \sin 2A + \frac{\tilde{F}}{Mp} \cos 2A,$$

eli

$$\tan 2A = \frac{\left( \frac{\tilde{E}}{M^2} - \frac{\tilde{G}}{p^2} \right)}{\frac{\tilde{F}}{Mp}} = \frac{\tilde{E}p^2 - \tilde{G}M^2}{\tilde{F}Mp}.$$

Tämä antaa kaksi maksimi- ja kaksi minimiarvoa, jotka ovat kaikki neljä  $90^\circ$  etäisyydellä toisistaan<sup>1</sup>.

Nämä ominaisarvot saadaan kirjoittamalla kaava (10.10) seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} \cos A & \sin A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E}}{M^2} - m^2 & \frac{\tilde{F}}{Mp} \\ \frac{\tilde{F}}{Mp} & \frac{\tilde{G}}{p^2} - m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{bmatrix} = 0;$$

Tämä edellyttää, että keskellä olevan matriisin *determinantti häviää*:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \left( H^{-1} \tilde{H} - m^2 I \right) = \\ &= \left( \frac{\tilde{E}}{M^2} - m^2 \right) \left( \frac{\tilde{G}}{p^2} - m^2 \right) - \frac{\tilde{F}^2}{M^2 p^2} = \\ &= m^4 + \left( -\frac{\tilde{E}}{M^2} - \frac{\tilde{G}}{p^2} \right) m^2 + \frac{1}{M^2 p^2} \left( \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 \right). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Mikäli  $F = 0$ , saadaan ehto  $\sin 2A = 0$ , joka täyttyy kun  $A = k \cdot 90^\circ$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Tästä

$$m_{1,2}^2 = \frac{\left(\frac{\tilde{E}}{M^2} + \frac{\tilde{G}}{p^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{E}}{M^2} + \frac{\tilde{G}}{p^2}\right)^2 - 4\frac{1}{M^2p^2}(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}}{2}.$$

Nämä kaksi ratkaisua  $m_1, m_2$  kutsutaan *pääsuurennussuhteiksi*.

Mikäli  $\tilde{H}$ -matriisi on päälävistäjämatrisi:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{E} & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix},$$

saadaan

$$\det(H^{-1}\tilde{H} - m^2I) = \left(\frac{\tilde{E}}{M^2} - m^2\right)\left(\frac{\tilde{G}}{p^2} - m^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$m_{1,2}^2 = \frac{\tilde{E}}{M^2}, \frac{\tilde{G}}{p^2}.$$

$m_1 = \sqrt{\frac{\tilde{E}}{M^2}}$  on *meridiaanisuunnan suurennussuhde*,  $m_2 = \sqrt{\frac{\tilde{G}}{p^2}}$  on *leveyspiirisuunnan suurennussuhde*. Välisuunnissa  $A$  (atsimuti) suurennussuhde on silloin

$$m = \sqrt{m_1^2 \cos^2 A + m_2^2 \sin^2 A}.$$

### 10.1.4 Tissot-indicatrix

Matriisia (“mittakaavatensoria”)

$$H^{-1}\tilde{H} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E}}{M^2} & \frac{\tilde{F}}{Mp} \\ \frac{\tilde{F}}{Mp} & \frac{\tilde{G}}{p^2} \end{bmatrix} = g^{ik}\tilde{g}_{kj} = \tilde{g}_j^i$$

kuvataan usein ellipsinä maan pinnalla (tai vastaavasti, karttatasossa). Matriisin ominaisarvot ovat  $m_1^2$  ja  $m_2^2$ ; sen kuvaaja-ellipsin akselit ovat pituuksiltaan  $m_1$  meridiaanisuunnassa ja  $m_2$  leveyspiirisuunnassa. Tätä ellipsiä kutsutaan *TISSOT<sup>2</sup>-indicatrix:ksi*. Ks. osa 9.3.3.

Monista käytetyistä karttaprojektioista kannattaa mainita erityisesti ne, jotka ovat *konformisia*, eli mittakaava pisteessä on sama kaikkiin suuntiin:

$$m_1 = m_2 = m,$$

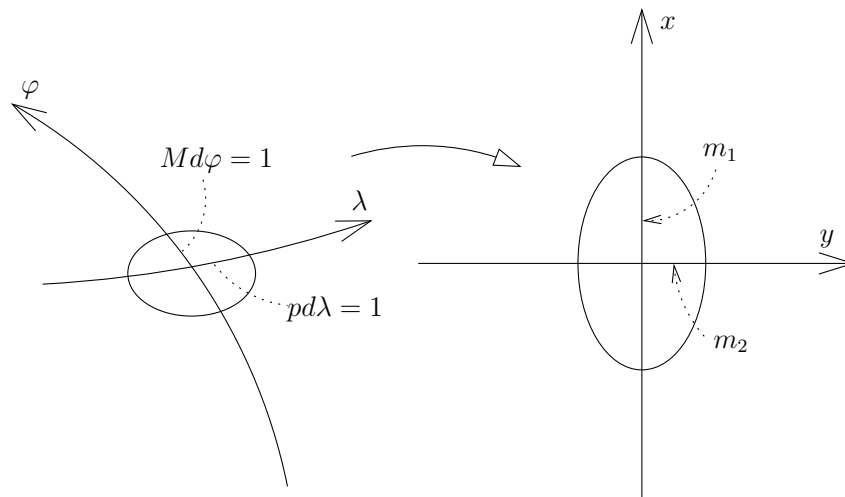
Tissot-indicatrix on *ympyrä*. Konformisilla projektioilla pienet ympyrät, neliöt ja paikalliset kulmat ja pituussuhteet kuvautuvat oikein. Pinta-alat kuitenkin vääristyvät.

Konformisilla projektioilla on se hyvä ominaisuus, että projektiokaavat toiseen koordinaattisuuntaan voidaan laskea jos kaavat toiseen koordinaattisuuntaan on annettuna.

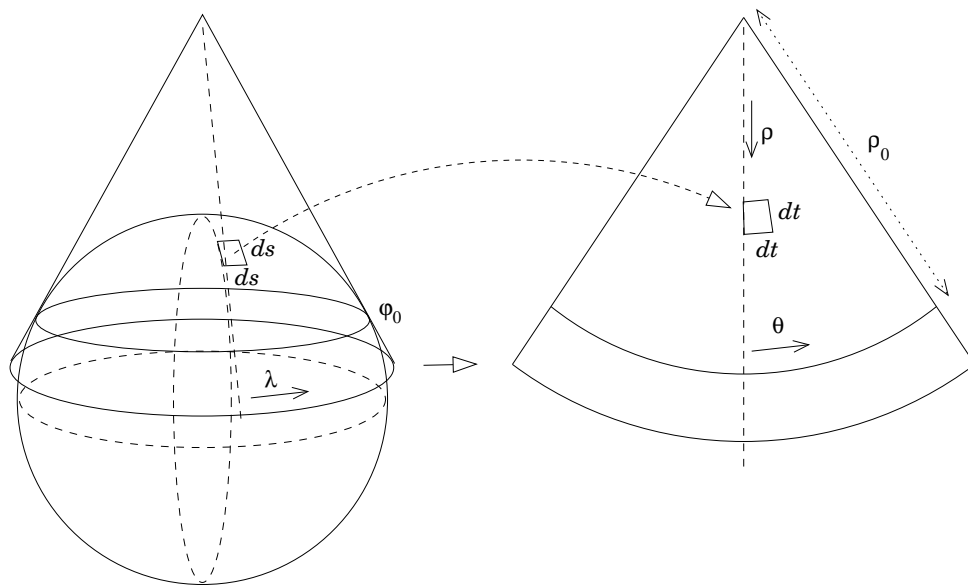
Joskus hyödyllinen ominaisuus on<sup>3</sup>, että pinta-alat kuvataan oikein, vaikka pienten ympyröiden tai neliöiden muodot vääristyisivät. Tämä ehto on  $\det(H^{-1}\tilde{H}) = m_1^2 m_2^2 = \text{vakio}$ .

<sup>2</sup>Nicolas Auguste Tissot (1824-1897), ranskalainen kartograafikko

<sup>3</sup>Esimerkiksi, kuvatessa väestön tai muun ilmiön pintatiheys.



Kuva 10.1: TISSOT:n indicatrix



Kuva 10.2: Lambertin projektio

## 10.2 Lambert-projektio (LCC)

LAMBERT<sup>4</sup>-projektio (LCC, Lambert Conformal Conical) on kartioprojektio ja konforminen. Kaikkien leveyspiirien mittakaava on vakio; se on kuitenkin erilainen eri leveysasteelle, ja saavuttaa maksimiarvoaan tietyllä leveysasteella  $\varphi_0$  keskellä kartoitettavaa aluetta. Yleensä tämä arvo on  $m > 1$ ; silloin on *kaksi standardileveyspiiriä* joilla mittakaava on  $m = 1$ .

Meridiaanien kuvat karttatasossa ovat suoria, jotka leikkautuvat yhdessä pisteessä, joka on samalla kaikkien leveyspiirien kuvien yhteinen keskus.

Napakoordinaatit karttatasossa ovat

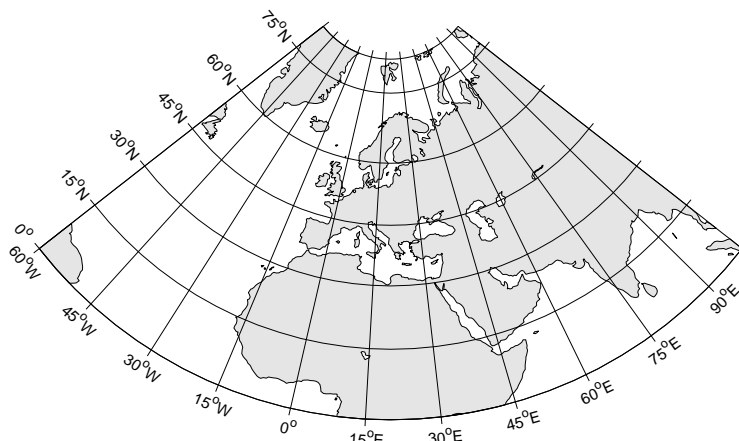
$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta, \\ y &= \rho_0 - \rho \cos \theta, \end{aligned}$$

missä  $\rho = \rho_0$  kuvaa leveyspiiri  $\varphi = \varphi_0$ .

Myös

$$\theta = n\lambda. \tag{10.11}$$

<sup>4</sup>Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) sveitsiläinen matemaatikko, fyysikko ja tähtitieteilijä.



Kuva 10.3: Esimerkki Lambert-projektioista (käytetty softa: `m_map` (<http://www2.ocgy.ubc.ca/~rich/map.html>))

Olkoon  $ds$  matka-alkio maan pinnalla ja  $dt$  vastaava elementti karttatasossa; silloin leveyspiiriä pitkin

$$\begin{aligned} ds &= p(\varphi) d\lambda \\ dt &= n\rho d\lambda \end{aligned}$$

ja jakamalla

$$\frac{dt}{ds} = \frac{n\rho}{p}.$$

Konformisuuden perusteella tämä pätee myös meridiaania pitkin.

Nyt meillä on  $ds = M(\varphi) d\varphi$ , siis

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = \frac{n\rho}{p} M.$$

Jos  $\rho$  lasketaan positiiviseksi etelään päin eli  $d\rho = -dt$ , saadaan:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -n\rho(\varphi) \frac{M(\varphi)}{p(\varphi)}. \quad (10.12)$$

Kaavojen (10.11, 10.12) avulla voidaan laskea  $(\theta, \rho)$  jos on annettuna  $(\varphi, \lambda)$ . Kuitenkin siirretään ensin  $\rho$  vasemmalle puolelle:

$$\frac{d}{d\varphi} \ln \rho = -n \frac{M}{p} \Rightarrow \rho = \rho_0 \exp \left\{ -n \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi' \right\}.$$

Mikäli määritellään

$$\psi(\varphi) \equiv \int_0^{\varphi} \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi',$$

ns. *isometrinen leveysaste*, saadaan

$$\rho = \rho_0 \exp \{ -n(\psi(\varphi) - \psi(\varphi_0)) \} = \rho_0 \frac{\exp \{ -n\psi(\varphi) \}}{\exp \{ -n\psi(\varphi_0) \}}. \quad (10.13)$$

Lisäksi pitää valita arvo  $n$ . Se tehdään siten, että mittakaava on stationaarinen vertauslatitudilla  $\varphi_0$ :

$$\frac{dm}{d\varphi} = 0 \text{ jos } \varphi = \varphi_0.$$

Mittakaava on

$$m \equiv \frac{d\rho}{ds} = -\frac{dt}{ds} = -\frac{n\rho}{p},$$

eli

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\varphi} &= \frac{n}{p} \frac{d\rho}{d\varphi} - \rho \frac{n}{p^2} \frac{dp}{d\varphi} = \\ &= \frac{n^2\rho}{p^2} M - \frac{n\rho}{p^2} M \sin\varphi = \frac{n\rho}{p^2} M (n - \sin\varphi), \end{aligned}$$

mikä pitäisi olla nolla kun  $\varphi = \varphi_0$ . Se onnistuu valitsemalla

$$n = \sin\varphi_0.$$

Alkuehtona pitää vielä valita  $\rho_0$ ; se antaa mittakaavaksi vertausleveyspiirillä

$$m(\varphi_0) = n \frac{\rho_0}{p(\varphi_0)}.$$

Vaihtoehtoisesti voidaan valita arvo  $\varphi_1$  missä  $m(\varphi_1) = 1$  (standardilatitudi): silloin

$$n \frac{\rho_1}{p(\varphi_1)} = 1,$$

josta  $\rho_1 \equiv \rho(\varphi_1)$  seuraa. Nyt  $\rho(\varphi)$  saadaan integroimalla (10.12) alkuarvosta joko  $\rho_0$  tai  $\rho_1$ , integrointivälin ollessa joko  $[\varphi_0, \varphi]$  tai  $[\varphi_1, \varphi]$ .

**Käänteisoperaatio** on  $\theta \rightarrow \lambda$  kannalta helppoa; differentiaaliyhtälön (10.12) käänteinen ratkaiseminen ( $\varphi$ :n laskeminen jos  $\rho$  on annettu) onnistuu seuraavasti:

1. käännetään analyyttisesti kaava (10.13):

$$\psi(\varphi) = -\frac{\psi(\varphi_0)}{n} (\ln\rho - \ln\rho_0);$$

2. Suoritetaan käänteinen lasku  $\psi \rightarrow \varphi$  (ks. alle).

## 10.3 Isometrisestä leveysasteesta

Isometrinen leveysaste,

$$\psi = \int_0^\varphi \frac{M(\varphi)}{p(\varphi)} d\varphi,$$

voidaan laskea numeerisesti (kvadratuuri; Matlabin QUAD-rutiinit). Kuitenkin pallon tapauksessa löytyy suljettu ilmaisu

$$\psi = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \quad (10.14)$$

helposti todistettavissa differentioimalla ketjusäännön avulla.

Jopa pyörähdysellipsoidille löytyy suljettu ratkaisu:

$$\psi = \ln \left[ \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left( \frac{1 + e \sin\varphi}{1 - e \sin\varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]. \quad (10.15)$$

Ks. liite A.

**Käänteisoperaatio:** mikäli  $\psi$  on annettuna ja  $\varphi$  laskettavana, voidaan ottaa kaava

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{M(\varphi)}{p(\varphi)}$$

ja kääntä se:

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{p(\varphi)}{M(\varphi)}.$$

Tämä kaava on yleistä muotoa

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

ja voidaan numeerisesti ratkaista käyttämällä Matlabin ODE-rutiineja.

Vaihtoehtoinen tapa pallon tapauksessa on kaavan (10.14) analyyttinen kääntäminen:

$$\varphi = 2 \left( \arctan \exp \psi - \frac{\pi}{4} \right).$$

Tämä kelpaa myös ellipsoidisen tapauksen ensimmäiseksi iteraatioaskeliksi:

$$\varphi^{(0)} = 2 \left( \arctan \exp \psi - \frac{\pi}{4} \right),$$

jonka jälkeen

$$\varphi^{(i+1)} = 2 \left\{ \arctan \left[ \left( \frac{1 - e \sin \varphi^{(i)}}{1 + e \sin \varphi^{(i)}} \right)^{\frac{e}{2}} \exp \psi \right] - \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Tämä konvergoi nopeasti.

## 10.4 Mercator-projektio

Klassinen MERCATOR-projektio saadaan Lambertin rajatapauksena valitsemalla limiitti  $n \rightarrow 0$ ,  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , mutta kuitenkin  $n\rho_0 = 1$ , ja myös  $\varphi_0 = 0$ . Silloin

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \exp \{ -n(\psi(\varphi) - \psi(\varphi_0)) \} \approx \\ &\approx \rho_0 - n\rho_0(\psi(\varphi) - \psi(\varphi_0)) = \\ &= \rho_0 - \psi(\varphi). \end{aligned}$$

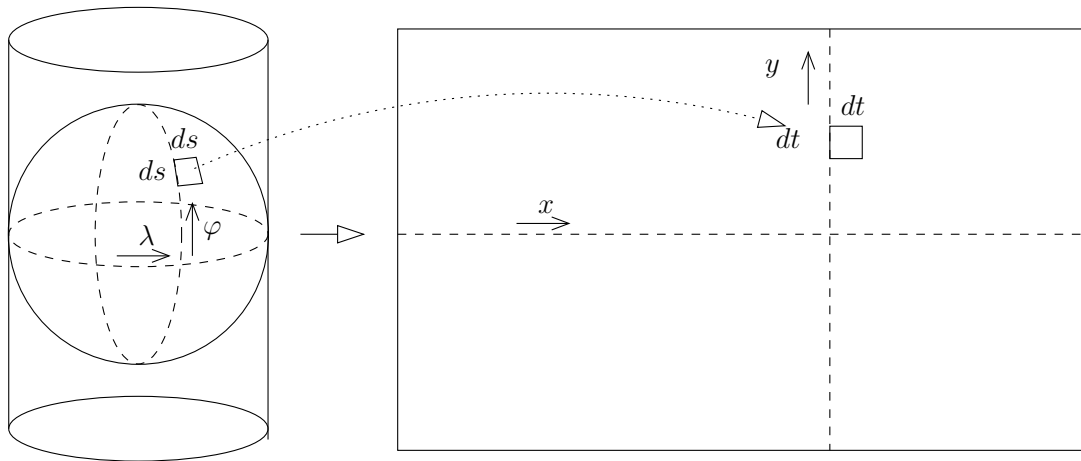
Valitaan  $y \equiv -(\rho - \rho_0)$  ja  $x \equiv \lambda$  ja meillä on *Mercatorin projektiokaavat*

$$\begin{aligned} x &= \lambda, \\ y &= \psi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi'. \end{aligned}$$

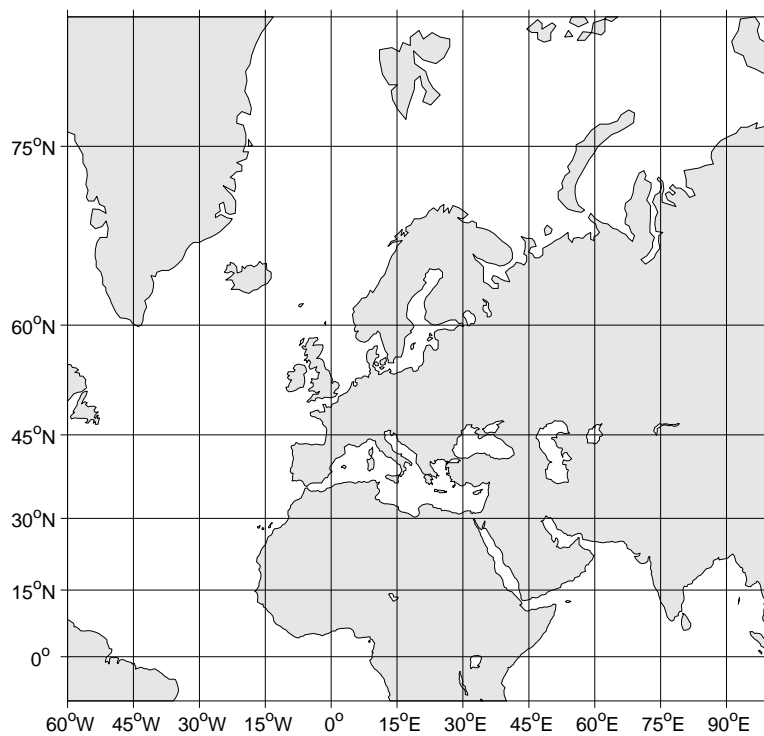
Tässä isometrinen leveyaste komeilee kaiken yksinkertaisimmillaan: pallogeometrian tapauksessa

$$y = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Mercator ei ole "lamppuprojektio": ei ole projektiokeskusta mistä "valo" lähtee.



Kuva 10.4: Mercatorin projektio



Kuva 10.5: Esimerkki Mercator-projektioista

## 10.5 Stereograafinen projektio

Tämä ns. atsimutaalinen projektio on myös konforminen ja myös Lambert-projektion limiittitapaus.

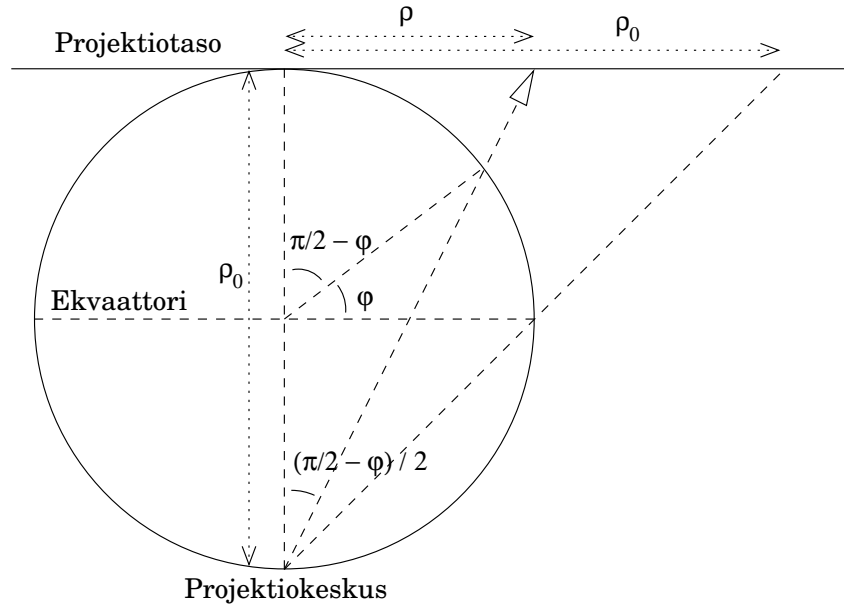
Valitaan kaavassa (10.13)  $n = 1$  ja valitaan  $\varphi_0 = 0$  (ekvaattori) ja  $\rho_0$  vastaavasti eli  $\rho_0 \equiv \rho(\varphi_0)$ . Silloin

$$\rho = \rho_0 \exp\{-\psi(\varphi)\}.$$

Valitettavasti limiitissä  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$  funktio  $\psi(\varphi)$  divergoi; voimme määritellä

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \exp\{-\psi(\varphi)\} & \text{jos } \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ \rho &= 0 & \text{jos } \varphi = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

jonka jälkeen  $\rho(\varphi)$  on jatkuva.



Kuva 10.6: Stereograafinen projektiio

Pallon tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho_0 / \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \\
 &= \rho_0 \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \\
 &= \rho_0 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \\
 &= \rho_0 \tan\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right].
 \end{aligned}$$

Tämä tapaus on kuvattu kuvassa 10.6.  $\rho_0$  on etäisyys projektion keskipisteestä (“etelänapa”) projektiotasoon. Tässä tapauksessa projektiio on todellinen “lamppuprojektiio”... mutta valitettavasti *vain* pallogeometrian tapauksessa.

Johdetaan stereograafisen projektion *mittakaava*:

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{d\psi} \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = -\rho_0 \exp\{-\psi\} \cdot \frac{M}{p} \cdot \frac{1}{M} = -\frac{\rho}{p} = -\rho_0 \frac{\exp\{-\psi(\varphi)\}}{p(\varphi)}.$$

Arvo on negatiivinen koska  $x$  kasvaa pohjoiseen päin ja  $\rho$  etelään päin. Koordinaati  $x$  on metrinen “northing”.

Käyttämällä kaava 10.15 saadaan

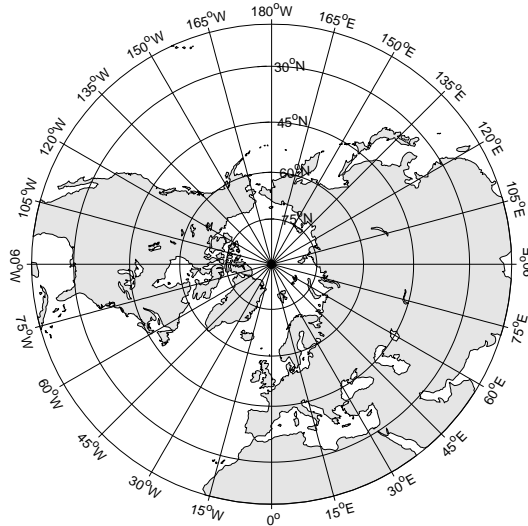
$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\rho_0}{N \cos(\varphi)} \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}\right)^{-\frac{e}{2}},$$

eli navan lähistöllä

$$\frac{d\rho}{dx} \approx -\frac{\rho_0}{2} \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^{-\frac{e}{2}}.$$

Maan tapauksessa jossa (GRS80)  $e = 0.08181919104281097693$ , saadaan viimeiselle  $e$ -termille 0.99331307907268199009. Jos halutaan mittakaavaksi 1 navalla, on asetettava

$$\rho_0 = 2.01346387371353381594.$$



Kuva 10.7: Esimerkki stereograafisesta projektioista

Vertauslatitudi	Latitudiväli	Tukipisteiden määrä	Laskentapiste ( $\varphi, \Delta\lambda$ )	Termien määrä
1°	1° – 20°	20	(19°.333, 10°.0)	12
61°	61° – 80°	20	(79°.333, 20°.0)	16
70°	61° – 80°	20	(79°.333, 20°.0)	15
70°	61° – 80°	39	(79°.333, 20°.0)	15
65°	61° – 70°	19	(60°.333, 10°.0)	14

Taulukko 10.1: Gauß-Krüger -testilaskujen tuloksia. “Termien määrä”: tarvittavaa polynomikehitelmän termien määrä saavuttakseen alle  $\pm 1$  mm muutosta laskettuihin Gauß-Krüger -koordinaatteihin

## 10.6 Gauß-Krüger projektio

Hyvä käytännön esimerkki karttaprojektioista on Suomessa käytössä oleva Gauß-Krüger. Se on poikittainen lieriöprojektiio joka on *konforminen*.

Samoin kuin perinteisesti on ollut tapana, tulemme esittämään projektiokaavat sarjakehitelmänä. Mutta toisin kuin perinteisesti, tulemme määrittämään kehitelmän kertoimet *numeerisesti*.

Menetellään seuraavalla tavalla. Ensinnäkin valitaan sopiva *lähtöprojektiio*, esim. tavallinen Mercator, jolla on yksinkertaiset kaavat. Siis kuvataan maaellipsoidin pinta tavalliseen Mercator-karttasuoraan:

$$\begin{aligned} v &= \lambda - \lambda_0, \\ u &= \int_0^\varphi \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi'. \end{aligned}$$

Seuraavaksi konstruoidaan Mercator-tasossa *analyttinen kuvaus*

$$u + iv \rightarrow x + iy,$$

jonka eräänä ominaisuutena on, että  $x$  on pituudeltaan oikein keskimeridiaania  $\lambda - \lambda_0 = y = v = 0$  pitkin.

$$dx = M(\varphi) d\varphi,$$

siis

$$x = \int_0^{\varphi} M(\varphi') d\varphi'. \quad (10.16)$$

Tämän lisäksi meillä on keskimeridiaanilla:

$$y = 0.$$

Nyt meillä on *reuna-arvotekävä*: etsitty kompleksi karttakoordinaatti  $\mathbf{z} \equiv x + iy$  on annettuna lähtöprojektion karttakoordinaatin  $\mathbf{w} \equiv u + iv$  funktiona reunalla  $y = v = 0$  eli reaaliakselilla. Tehtävä on määrittää funktio *koko kompleksitasossa*. Ks. kuva 10.8.

**Intermezzo.** Kompleksisessa analyysissä puhutaan *analyttisistä funktioista*. Analyytinen funktio on sellainen kuvaus

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{w})$$

joka on differentioitavissa. Ei vain kerran, vain äärettömän monta kertaa. Tässä tapauksessa pätevät CAUCHY-RIEMANN -ehdot:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v},$$

jos  $\mathbf{x} = x + iy$ ,  $\mathbf{w} = u + iv$ .

Tämä merkitsee, että pieni vektori  $\begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix}^T$  kuvautuu vektoriksi  $\begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix}^T$  seuraavan kaavan mukaan:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix},$$

jossa  $a = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}$  ja  $b = \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v}$ , juuri kuten Cauchy-Riemann -ehdot edellyttävät.

Tästä näkyy, että paikallisten vektorien kuvaus  $(du, dv) \rightarrow (dx, dy)$  on *skaalaus ja rotaatio*; eli meillä on *konforminen kuvaus*.

Lähes kaikki tutut funktiot ovat kompleksisena analyttisiä: eksponentti, logaritmi, trigonometriset ja hyperboliset funktiot, ja erityisesti *potenssisarjakehitelmät*. Kahden analyttisen funktion summa ja tulo on edelleen analyytinen.

Cauchy-Riemann -ehdoista saadaan *vielä* LAPLACE-yhtälöt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0.$$

Kokeillaan yleiseksi ratkaisuksi *sarjakehitelmää*:

$$\mathbf{z} = a_0 + a_1 \mathbf{w} + a_2 \mathbf{w}^2 + a_3 \mathbf{w}^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{w}^k. \quad (10.17)$$

Tässä määrittelimme yleisyyden vuoksi

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &\equiv (x - x_0) + iy, \\ \mathbf{w} &\equiv (u - u_0) + iv. \end{aligned}$$

Arvot

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv \int_0^{\varphi_0} M(\varphi) d\varphi, \\ u_0 &\equiv \int_0^{\varphi_0} \frac{M(\varphi)}{p(\varphi)} d\varphi \end{aligned}$$



jossa  $d\mathbf{x} = [ dx \ dy ]^T$ ,  $d\mathbf{w} = [ du \ dv ]^T$ ,

$$\Re \left\{ \frac{dz}{dw} \right\} = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} = K,$$

mittakaava; ja

$$\Im \left\{ \frac{dz}{dw} \right\} = \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v} = K \sin \theta,$$

josta  $\theta$ , *meridiaanikonvergenssi*, voidaan ratkaista.

Klassisen Mercatorin valinta lähtöprojektioksi ei ole ainoa vaihtoehto. Luultavasti sarjakehitelmän (10.17) termien määrää voitaisiin vähentää käyttämällä Lambert-projektio vertauslatitudille  $\varphi_0$ . Onko saavutettava säästö vaivan arvoinen, on ns. hyvä kysymys.

## 10.7 Maanpinnan kaarevuus ja mittakaava

Muista edellisessä johdettu kaava 9.13:

$$R = - \sum_j \Delta g_{jj}.$$

Koska kaavan 9.12 mukaan  $R = 2K$ , saadaan

$$K = -\frac{1}{2} \sum_j \Delta g_{jj}.$$

Otetaan nyt karttatason suorakulmainen koordinaatisto  $(x, y)$  ja siirretään sen koordinaattiviivat takaisin kaarvan Maan pintaan, muodostaen kaarevalinjainen koordinaatisto  $(\xi, \eta)$ . Karttatason origon tai keskimeridiaanin kohdalla tämän koordinaatiston metriikka  $g_{ij}$  on, ainakin tavallisten karttaprojektioiden tapauksessa, *kvasi-eukliidinen*, ts. metriikka on yksikkömatriisi ja se on origossa stationaarinen. Tässä tapauksessa edellisen luvun teoria pätee.

*Konformisen projektion* tapauksessa metriikan muoto on

$$g_{ij} = m^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jossa  $m$  on karttaprojektion mittakaava, joka siis riippuu paikasta  $x^i$ .

Lasketaan

$$K = -\frac{1}{2} (\Delta g_{\xi\xi} + \Delta g_{\eta\eta}) = -\Delta (m^{-2}).$$

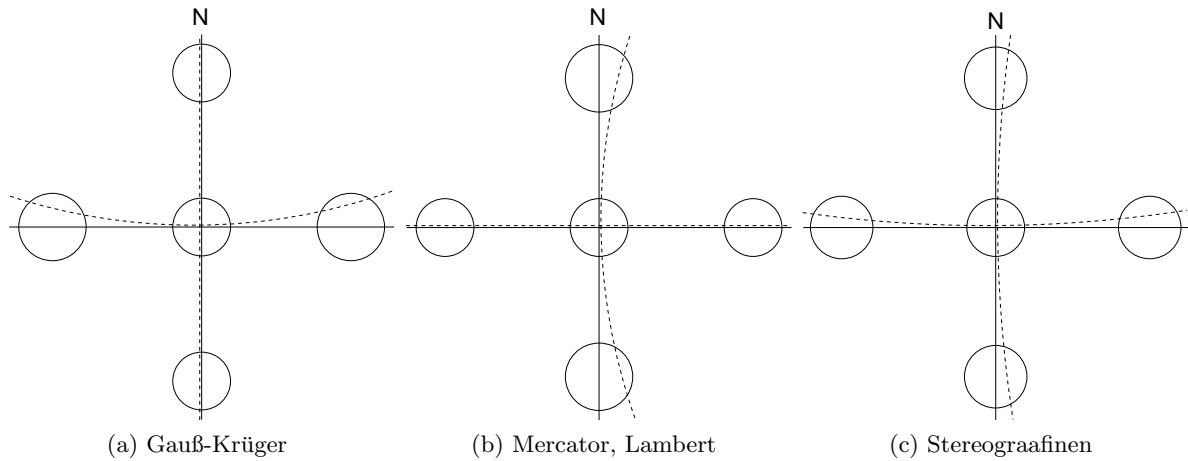
Nyt

$$\begin{aligned} \Delta (m^{-2}) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) m^{-2} (\xi, \eta) = \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial \xi} m^{-3} \frac{\partial}{\partial \xi} m - 2 \frac{\partial}{\partial \eta} m^{-3} \frac{\partial}{\partial \eta} m = \\ &\approx -2\Delta m, \end{aligned}$$

jos otetaan huomioon  $m$ :n stationaarisuus ja  $m \approx 1$ .

Siis

$$K = 2\Delta m.$$



Kuva 10.9: Karttaprojektioiden luokittelu “pystysuuntaiseksi”, “vaakasuuntaiseksi” ja “neliskanttiseksi” projektioiksi

Siis Gaußin kaarevuussäteen ja mittakaavan toisen paikkaderivaatan (tarkemmin: Laplace-operaattorin  $\Delta$ ) välillä on yksinkertainen yhteys. Seurauksena on olemassa yhteys myös mittakaavan toisen derivaatan pohjois-etelä- ja länsi-itä -suuntien välillä: jos esim.

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = \frac{K}{2}$$

jne. Alla oleva taulukko antaa joitakin esimerkkejä – muista, että tarkastelualue on aina keskipisteen tai keskimeridian tai standardileveyspiirin tai ekvaatorin lähistö, jossa  $m \approx 1$  ja stationaarinen!

Projektio	$\partial^2 m / \partial x^2$	$\partial^2 m / \partial y^2$
Mercator	$\frac{K}{2}$	0
Lambert-kartioproj.	$\frac{K}{2}$	0
Vino stereograafinen	$\frac{K}{4}$	$\frac{K}{4}$
Gauß-Krüger, UTM	0	$\frac{K}{2}$

Taulukossa olemme taas käyttäneet  $(\xi, \eta)$  sijasta  $(x, y)$ , eli tehneet sijoitukset

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} \rightarrow \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} \rightarrow \frac{\partial^2 m}{\partial y^2},$$

mikä on sallittu kvasi-euklidisuuden perusteella.

Mercator- ja Lambert-projektioiden mittakaava on vakio  $y$ -koordinaatin suuntaan, ts. karttälänneestä kartta-itään. Poikittaisten lieriöprojektioiden mittakaava taas on vakio  $x$ -koordinaatin eli keskimeridian suuntaan. Stereograafinen vinoprojektio on puolestaan symmetrinen ja mittakaava käyttäytyy samalla tavalla kaikkiin tuulensuuntiin kartan keskipisteestä.

Näin voidaan käyttää mittakaavan toiset paikan derivaatat karttaprojektioiden luokitteluun. Esim. Lambert sopii parhaiten itä-länsisuunnassa ulottuvalle maalle (Eesti) kun taas Gauß-Krüger on paras pohjois-eteläsuuntaan ulottuvalle maalle (Uusi Seelanti). Konforminen tasoprojektio, vino stereograafinen projektio, on sopiva “neliskanttiselle” maalle (Alankomaat).



# A Isometrinen leveysaste ellipsoidille

Seurataan esitystapa kirjasta (Grossman, 1964).

Lähtökaava on

$$\psi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi'.$$

Differentiaaliyhtälönä

$$d\psi = \frac{M}{p} d\varphi = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi.$$

Integraandi hajoitetaan osamurtolukuihin:

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} &= \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{e^2 \cos^2 \varphi (1 - e \sin \varphi) + e^2 \cos \varphi (1 + e \sin \varphi)}{2(1 + e \sin \varphi)(1 - e \sin \varphi)} = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{e}{2} \left( -\frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} - \frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right). \end{aligned}$$

Ensimmäisen termin integraali on

$$\psi = \int_0^\varphi \frac{1}{\cos \varphi'} d\varphi' = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Todistus ketjusäännöllä:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} &= \frac{d \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{d \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{d \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{d \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{d \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{d\varphi} = \\ &= \frac{1}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right)} = \frac{1}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Tämä on *koko ratkaisu* tapauksessa, että  $e = 0$  (*pallo*ratkaisu).

Ellipsoidin tapauksessa toinen integraali

$$\int \left( -\frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right) d\varphi = \int \frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} d\varphi = \ln f(\varphi) = \ln(1 + e \sin \varphi),$$

jossa kirjoitustapa  $f \equiv 1 + e \sin \varphi$ . Samalla tavalla

$$\int \left( -\frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right) d\varphi = -\ln(1 - e \sin \varphi),$$

ja lopputulos on

$$\begin{aligned} \psi &= \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} (\ln(1 + e \sin \varphi) - \ln(1 - e \sin \varphi)) = \\ &= \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right). \end{aligned}$$



## B Hyödylliset yhtälöt pääkaarevuussäteitten välillä

Kun on annettu pyörähdysellipsoidin pääkaarevuussäteiden kaavat:

$$\begin{aligned}N(\varphi) &= a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}, \\M(\varphi) &= a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2},\end{aligned}$$

saadaan lasketuksi raa'asti derivoimalla:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}(N(\varphi) \cos \varphi) &= -M(\varphi) \sin \varphi, \\ \frac{d}{d\varphi}(N(\varphi) \sin \varphi) &= +\frac{M(\varphi)}{1 - e^2} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}M^2(\varphi) &= a^2(1 - e^2)^2 \frac{d}{d\varphi}(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3} = \\ &= 3\frac{e^2 M^2 N^2}{a^2} \sin 2\varphi, \\ \frac{d}{d\varphi}(N^2(\varphi) \cos^2 \varphi) &= 2N \frac{d}{d\varphi}(N(\varphi) \cos \varphi) = \\ &= -MN \sin 2\varphi.\end{aligned}$$



## C Christoffelin symbolit metriikasta

Lähdetään metriikan määritelmästä luvusta 8.2:

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right],$$

jossa  $u^i = (u^1, u^2)$  on avaruuden kaarevan pinnan (tai yleisemmin, aliavaruuden) parametrisointi ("koordinaatisto"). Differentioidaan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Vastaavasti, vaihtelemassa indeksit keskenään:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^j \partial u^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^j \partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k} \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^k \partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^k \partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \quad (\text{C.3})$$

Lasketaan kaava (C.1) plus kaava (C.2) minus kaava (C.3):

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} = 2 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k}. \quad (\text{C.4})$$

Kirjoitetaan  $\mathbf{x}$ :n toiset derivaatat paikalliselle kannalle  $\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}, \mathbf{n} \right)$  kuten tehtiin kaavassa (8.7), vaikkakin hieman eri notaatiolla:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \equiv \Gamma_{ij}^l \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^l} + \beta_{ij} \mathbf{n}, \quad (\text{C.5})$$

mitä implisiittisesti määrittää  $\Gamma$ -symbolit. Sijoitus kaavaan (C.4) antaa

$$\Gamma_{ij}^l \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^l} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k} \right) + \beta_{ij} \left( \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} \right).$$

Tässä tunnustetaan

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^l} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k} \right) = g_{lk} \text{ ja } \left( \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k} \right) = 0,$$

eli

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2} g^{lk} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} \right), \end{aligned}$$

yhtälö (9.7). Tässä  $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$  eli  $g^{ij}$  on  $g_{ij}$ :n käänteismatriisi.



## D Riemannin tensori Christoffelin symboleista

Riemannin tensorikaava johdetaan vektorin rinnakkaiskuljetuksen avulla suljetun pikku koordinaattineliön ympäri.

Jos avaruuden vektori  $\mathbf{v}$  kuljetetaan rinnakkaisesti  $u^i$ -parametrisoidun pinnan  $S$  sisällä, pätee

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^i} = 0.$$

Kirjoitetaan  $\mathbf{v}$  tangenttivektorien kannalle:

$$\mathbf{v} = v^i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^j} &= \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} + v^i \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} = \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} + \Gamma_{jk}^i v^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} + \beta_{ij} \mathbf{n}, \end{aligned}$$

käyttämällä (C.5) Tässä  $\mathbf{v}$ -derivaatta koostuu kahdesta osasta: “sisäinen” osa,  $\frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} + \Gamma_{jk}^i v^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}$ , pinnan sisällä, ja “ulkoinen” osa,  $\beta_{ij} \mathbf{n}$ , kohtisuora pintaa kohtaan. Kun pinta  $S$  on annettuna, voidaan vain nollata sisäinen osa, eli

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma_{jk}^i v^k = 0 \quad (\text{D.1})$$

kuva vektorin  $v^i$  rinnakkaiskuljetus pinnan sisällä.

Kuvataan nyt pieni neliskantti  $ABCD$ , sivujen pituudet  $\Delta u$  ja  $\Delta v$  (ks. kuva 9.3), koordinaatti- viivoja pitkin. Sivut  $AB$  ja  $CD$  ovat vastakkaisella puolella, kulkeva koordinaatti on  $u^k$ . Samoin  $BC$  ja  $AD$  ovat vastakkain, kulkevana koordinaattina  $u^l$ .

Lasketaan  $v^i$ :n muutos matkalla  $AB$  :

$$\Delta_{AB} v^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} \Delta u = -\Gamma_{km}^i v^m \Delta u.$$

Samalla tavalla

$$\Delta_{CD} v^i = +\Gamma_{km}^i v^m \Delta u.$$

Sivulle  $BC$  saadaan

$$\Delta_{BC} v^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^l} \Delta u = -\Gamma_{lm}^i v^m \Delta u$$

ja

$$\Delta_{DA} v^i = +\Gamma_{lm}^i v^m \Delta u.$$

Ynnätään nämä neljä termiä:

$$\begin{aligned} \Delta_{ABCD} v^i &= \{((\Gamma_{km}^i v^m)_{CD} - (\Gamma_{km}^i v^m)_{AB}) - ((\Gamma_{lm}^i v^m)_{DA} - (\Gamma_{lm}^i v^m)_{BC})\} \Delta u = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial u^l} (\Gamma_{km}^i v^m) \Delta v - \frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{lm}^i v^m) \Delta v \right\} \Delta u = \\ &= \left\{ \left( \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{lm}^i}{\partial u^k} \right) v^m + \Gamma_{km}^i \frac{\partial v^m}{\partial u^l} - \Gamma_{lm}^i \frac{\partial v^m}{\partial u^k} \right\} \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

*D Riemannin tensori Christoffelin symboleista*

Kaava (D.1) antaa

$$\frac{\partial v^m}{\partial u^l} = -\Gamma_{lh}^m v^h, \quad \frac{\partial v^m}{\partial u^k} = -\Gamma_{kh}^m v^h;$$

sijoitetaan:

$$\begin{aligned} \Delta_{ABCD} v^i &= \left\{ \left( \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{lm}^i}{\partial u^k} \right) v^m + (\Gamma_{lm}^i \Gamma_{kh}^m - \Gamma_{km}^i \Gamma_{lh}^m) v^h \right\} \Delta u \Delta v = \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial u^k} + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m \right) v^j \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

jossa olemme vaihtaneet indeksien nimet  $m \rightarrow j$  (ensimmäisessä kahdessa termissä) ja  $h \rightarrow j$  (jälkimmäisessä kahdessa termissä).

Tästä näkyy valmiina *Riemannin kaarevuustensori*:

$$R_{jlk}^i = \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial u^k} + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m,$$

indeksien nimejä ja  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ -tyyppisiä vaihtoja lukuunottamatta juuri se, mitä kaavassa (9.9) jo annettiin.

## Kirjallisuutta

- Grossman, W. (1964). *Geodätische Rechnungen und Abbildungen*. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.
- Heikkinen, M. (1981). Solving the shape of the Earth by using digital density models. Report 81:2, Finnish Geodetic Institute, Helsinki.
- Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- Moritz, H. (1992). Geodetic Reference System 1980. In Tscherning, C. C., editor, *Geodesist's Handbook 1992*, pages 187–192. International Association of Geodesy, Copenhagen.